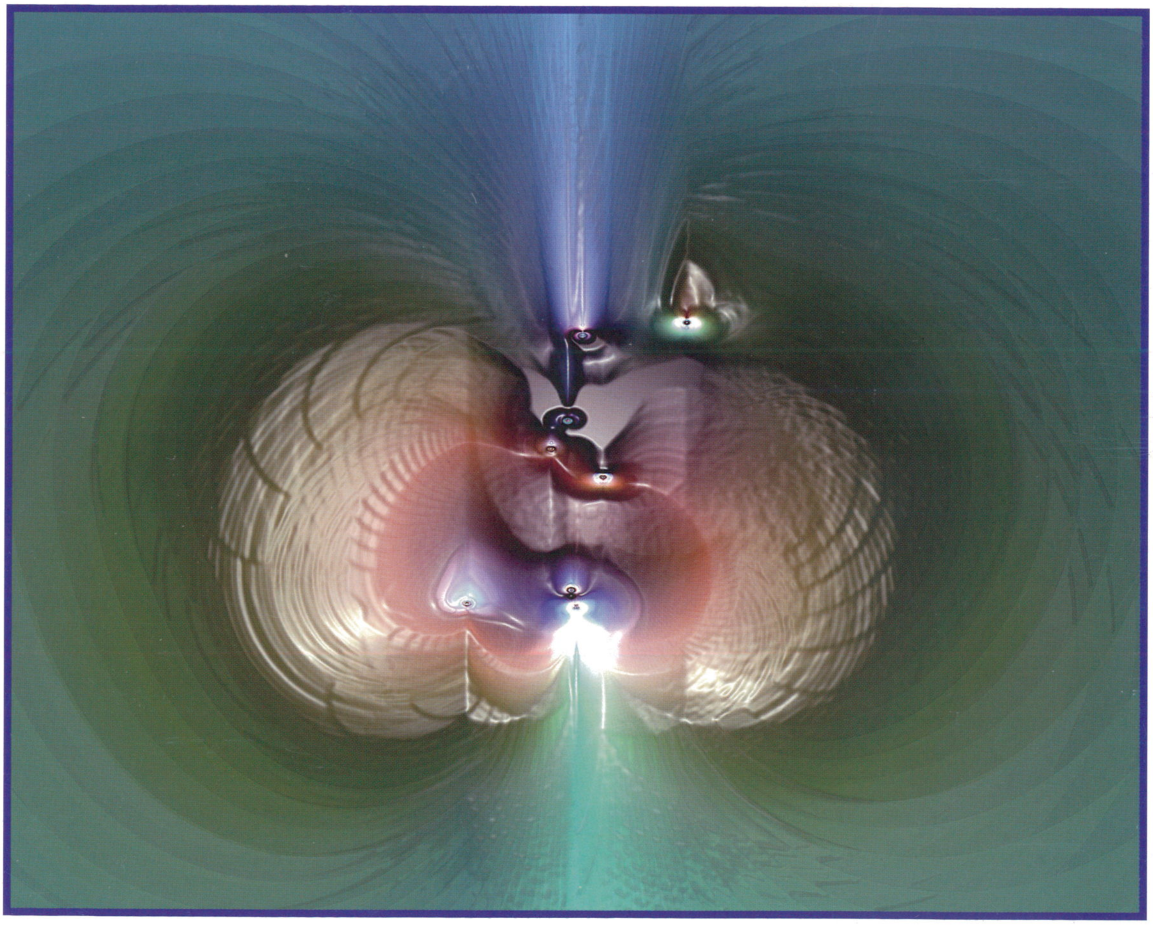
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2010年2月1日発行　第48巻2号　毎月1回1日発行

ISSN 0386—2240

数理科学

2
2010

特集 数学の可視化
イメージと直観からの展望



No.560

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-71：for Senior & Graduate Courses）

ε–δ 論法再入門

直観から論理へ

中神 祥臣　著

本体 1857 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

微積分を学ぶ中で一度触れたことのある人には恰好の「再入門書」，そして初学者にとっては恰好の「入門書」である．読み通せば，微積分の土台がしっかり理解できるとともに，数学における「論理」とは一体どういうものであるのかを知ることができる．

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 560 February 2010

数学の可視化
イメージと直観からの展望

本号に掲載された広告主
日立ハイテクノロジーズ／表4
朝倉書店／31
牧野書店／43

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．郵送料小社負担にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2007 年/5 省略
2007 年/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力

数理科学臨時別冊一覧

08 年/5 重力理論講義
08 年/6 代数幾何入門講義
08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数
08 年/11 量子暗号理論の展開
09 年/1 量子力学の考え方
09 年/7 ゲージ理論の発展
09 年/9 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
09 年/11 重点解説 基礎微分幾何
09 年/12 ε–δ 論法再入門
10 年/1 多彩な量子の世界

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

February 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 560

特集／数学の可視化

現代の直観幾何学を目指して

河野 俊丈

1. ヒルベルトの直観幾何学

ヒルベルト，コーン・フォッセンの著作に『直観幾何学』[1]がある．原著の題名は “Anschauliche Geometrie” であり，1932 年に刊行されている．日本語版で「直観」と訳されているドイツ語の Anschauliche は「一目瞭然に見通すことができるように示す」ことを表している．1932 年は，幾何学においては，代数幾何学，位相幾何学などの分野において抽象的な枠組みを構築することがさかんに始められてきた時期である．そのような流れの中にあって，なぜこの著書ではあえて幾何学を直観的に捉える手法の重要性が強調されているのであろうか．その精神をよく表しているヒルベルトによって書かれた序文から一部を引用しておこう．

> 幾何学およびそれと数学の他の分野との関係は非常に多方面にわたっているけれども，この直観的の道に沿って進むときは，数学全般についての見通し，そこにおける問題の豊富さに対する洞察，そこに含まれる思想の多様性の認識などを容易に得ることができる．このようにして，直観的な観察方法によって幾何学の多くの部門に導いていくことは，広く一般の人たちに数学に対する正しい理解と評価を持っていただくためにもまた適当なものであると思う．（芹沢正三訳）

『直観幾何学』では，曲線と曲面，規則的な配置，微分幾何学，位相幾何学など幅広い分野が扱われているが，このような直観的な幾何学の理解のために多くの図版が掲載されているとともに，読者が実際に模型を制作したりすることができるように配慮されている．

2. 幾何学模型制作の時代

前述の『直観幾何学』には，いくつかの石膏による曲面の模型の写真が掲載されている．これらは，19 世紀末から 20 世紀初めにかけてドイツで制作されたものである．模型は，代数幾何学，微分幾何学，複素関数論など多岐のジャンルにわたっていて，教育的なものだけでなく，当時の先端的な数学の研究成果を表現している．インタビュー記事でも述べたように石膏による幾何学模型制作のプロジェクトには多くの一線の数学者が関わっていて，Martin Schilling 社で 1932 年まで続けられた．

実は東京大学大学院数理科学研究科でも，このドイツ製の幾何学模型のコレクションを所蔵している．これは，ゲッティンゲン大学などにあるも

のと並んで，世界的に見ても，最も完全なコレクションの一つである．東京大学では，1910年代頃に，理学部数学教室に輸入されたようで，現在では，数理科学研究科の資料室に一部が展示されている．

幾何学模型は20世紀半ばの数学の抽象化の流れの中で，一時忘れられた感があったが，ドイツでも Vieweg 社によって模型の一部が復刻され，また，フィッシャーによる解説書[2)]が出版されるなどして，模型に対する再評価の動きが高まっている．

また，幾何学模型は数学の枠を超えて，多くの分野に影響を及ぼしてきた．20世紀前半頃には，多くの博物館などで，このドイツ製の幾何学模型が展示されており，一般の人たちから見た数学のイメージの形成に大きな役割を果たした．この影響は，超現実主義，構成主義などの芸術運動にも及んでいった．我々が目にする20世紀の抽象芸術の源流には，アフリカの原始美術など，様々な要素があったと考えられるが，数学の幾何学模型もその要素の一つであったということができるのである．

3. 数学を視る手法

これまでに，歴史的な流れに沿って，直観的に幾何学を視る精神について述べてきたが，現在の我々は，数学を視るためのどのような手法をもっているであろうか．これが，この特集の主題である．

この特集では，幾何学に限らず解析学や統計学などを含む様々な分野で，数学を可視化する手法についてとりあげていただいた．

ヒルベルトによる『直観幾何学』の序文にもあるように，直観的に視ることは「数学全般についての見通し」を与えるものであり，その影響は幾何学の分野にとどまらない．現代の数学では，例えば整数論の問題であっても，それを幾何学的に捉えるといった，様々な手法が確立されている．また，幾何学的な形状を視るために微分方程式の解の空間を調べるといった解析的な手法を用いる研究の方向もある．その意味では，幅広い分野で数学の可視化による直観の手法が浸透してきていると言える．

このような手法のいくつかは数学者独特の直観で一般の人たちに絵として見せるのはなかなか難しいといった側面も確かにある．しかし，コンピュータ技術の急速な発展によって，これまで視ることが困難であった数学のテーマを，見事な画像で捉えることが可能になってきた分野もある．また，手計算では処理しきれないような大量の計算をコンピュータで組織的に行わせることによって理論の形を明らかにしていくことも，可視化の一つの形態であろう．

今回の特集では，著者の方々に，多くの図版を用いて説明していただくとともに，関連する画像ファイルの掲載されたURLや可視化のためのソフトウェアなどに関する情報も記載していただいた．インタビュー記事にも，教育的なものから研究支援のためのものまで，いくつか紹介してあるので，読者の方には，この特集とあわせて是非参照していただきたい．このようなコンピュータ技術の発達は数学の生き生きとした描像を与えてくれるとともに，ソフトウェアを用いて実験しながら研究を進めていくという，新しいスタイルを提供している．

すでに述べたように，「数学の可視化」は，このように画像としてみせることができる分野にとどまらない．幾何学的な直観的な手法が多くの分野で用いられている．これらをどのように視覚化して見せることができるか，また，研究に用いることができるかが今後の課題である．

参考文献

1) D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, “Anschauliche Geometrie”, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932. (邦訳）ヒルベルト，コーン・フォッセン，『直観幾何学』芦沢正三訳，みすず書房.
2) G. Fischer, “Geometric models”, Vieweg, 1986.

（こうの・としたけ，東京大学大学院数理科学研究科）

微積分の基礎概念の視覚的理解

高校数学から大学数学への架け橋

新井 仁之

1. 微分積分の基礎概念の視覚的理解の有効性

微分積分の講義あるいは本などの記述が今一つわかりにくいと感じている読者も少なからずおられるのではないだろうか．例えば，大学の教科書では，『関数 $f(x)$ が $x=c$ で微分可能であるとは，ある数 A が存在し，任意の正数 ε に対して，$0<|x-c|<\delta$ であれば

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-A\right|<\varepsilon$$

が成り立つような δ をとれることである．この c を $f'(a)$ と表し，f の a における微分係数と言う』と書かれている．しかしこう言われても，何かイメージがわかない．本稿の前半ではではそういった読者を対象に，微分積分の基礎概念を視覚的に理解できるよう解説したい．

数学は抽象的な学問であり，視覚的な理解は本当の理解ではない．確かに視覚による理解は厳密には不完全なものである．特に微分積分についていえば，19 世紀中葉以前には，理論の中に視覚情報に頼ったあいまいさが陰に陽に混在していた．それを 19 世紀以来，多くの数学者が論理的に純化し，厳密な理論にしてきたのである．そうされた理論をわざわざまた視覚に頼って理解をすることは，時代を逆行する懐古趣味に他ならないと思われるかもしれない．しかしそうではない．昔の時代には視覚的に明らかなことを厳密に記述する方法が発見されていなかった．それに対して，私たちはすでに先人の努力の結晶である厳密な数学を手にしている．視覚的な理解は，現代ではその厳密な数学を理解するための補助的な手段の一つとしての意義をもっているのである．

もともと私たち人間は，視覚に強く根差した生活をしている．実際，脳のかなりの部分が視覚情報の処理に関与していることが知られている．したがって，何かを理解しようとするときに，視覚的な情報を利用しようとすることは自然なことであると言えよう．数学のような抽象的な学問の場合ですら，学び始めの初期の段階では，対象を可視化してみることは理解の大きな助けになるのである（図 1）．

もちろん可視化といっても，抽象的な概念そのものを可視化できるわけではない．可視化できるのは何かある具体的なものである．例えば関数の

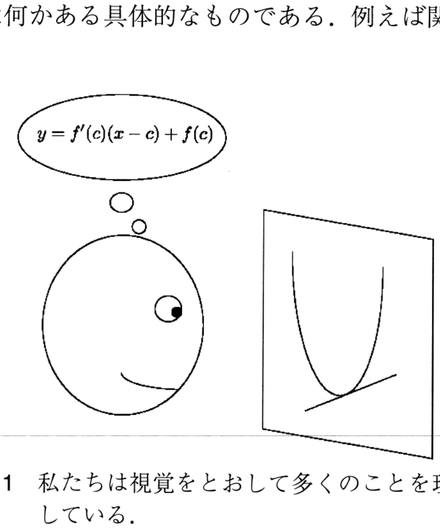


図 1　私たちは視覚をとおして多くのことを理解している．

連続性の定義そのものは可視化することはできない．しかし連続関数の例，不連続関数の例などのグラフはある程度正確に可視化でき，私たちはそういった具体例を見ることにより，抽象的な概念でも効率的に理解することができるのである．

2. 微分概念を視覚的に説明する

冒頭で挙げた関数の微分の概念から始めよう．そのためには，ある関数のグラフに接線を引く問題を考えるとわかりやすい．例えば，ある関数 $y=f(x)$ のグラフが図 2 のようになっているとする．このとき $x=c$ のところに接線を引くことを考えてみよう．ところで気になることは接線とは何かということである．接線とは，視覚的には関数のグラフに接している線のことである．それでは接しているとはどのように定義されるのであろうか？ 紀元前のギリシャでは『接線 L とは曲線 C と接線 L のあいだにほかの直線をひくことができないような直線』[4, 第 2 巻, p.46] と考えられていたようである（図 3 参照）．前節において，19 世紀，20 世紀以前の微分積分には視覚的な暗黙の理解が入り込んでいたことを述べたが，これはその一例になっていると言えるだろう．実は今から

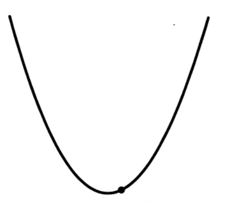


図 2

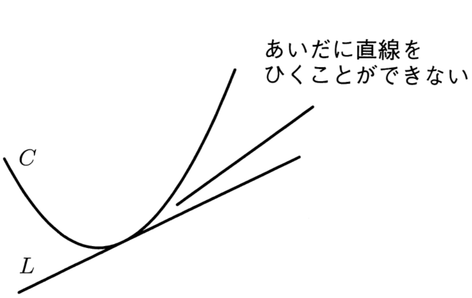


図 3

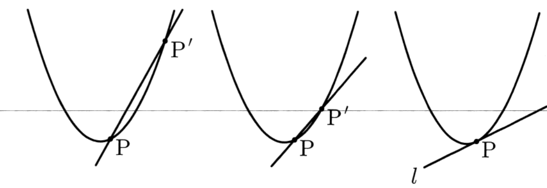


図 4

視覚的なイメージに基づいたあいまいな理解に基づいて接線の方程式を求めるが，現代の数学では，その求めた方程式を接線であると定義するのである．そしてその方程式を求める過程で，自然に微分の概念が現れる．

まず曲線 $y=f(x)$ の点 $\mathrm{P}=(c, f(c))$ における接線の引き方であるが，次のようなプロセスで描くことができる．曲線 $y=f(x)$ 上に P とは異なる点 P′ をとる．$\mathrm{P}'=(c+h, f(c+h))$ とおく．もしも P′ が P の右側にあるならば $h>0$ であり，左側にあるならば $h<0$ である．図 4 では $h>0$ の場合が描かれている．そこで直線 PP′ を引く．次に P′ を曲線 $y=f(x)$ 上を次第に P の方に動かしていく．するとその動きに応じて直線 PP′ も動き始める．例えば図 4 のような場合を考えてみる．P′ を P に近づけていき，図 4 の左図から右図へのプロセスを進めていくと，直線 PP′ が次第に P を通るある直線 l に近づいていくことがイメージできるであろう．さらに想像力を働かせれば，直線 l は，$y=f(x)$ に P で接していることもイメージできるであろう．この想像上の直線の動きを数式で記述して追跡してみよう．まず直線 PP′ の方程式であるが，

$$\mathrm{PP}': y=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}(x-c)+f(c)$$

となっていることは容易にわかる．ここで P′ を P に近づけていくということは，h（ただし $h \neq 0$）を次第に 0 に近づけていくことである．ここで議論をわかりやすく進めるために $f(x)$ として具体的な例を考えて議論を進めることにする．$f(x)=x^2$ とする．この場合，

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{2ch+h^2}{h}=2c+h$$

である．したがって h を 0 に近づけていくと

$(f(c+h)-f(c))/h$ はそれに応じて $2c$ に近づいていくことになる．したがって想像していた直線 l の方程式は

$$y=2c(x-c)+c^2$$

ということになる．一般に関数 $f(x)$ の場合，$h\neq 0$ を次第に 0 に近づけていくときに，もしも

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \qquad (1)$$

がそれに応じてある数 A に近づいていくならば，求める直線 l の方程式は $y=A(x-c)+f(c)$ となる．このとき，$f(x)$ は $x=c$ で**微分可能**であるといい，$A=f'(c)$ あるいは $A=\frac{df}{dx}(c)$ と表し，$f(x)$ の $x=c$ における**微分係数**と言う．この記号を用いれば直線 l の方程式は

$$y=f'(c)(x-c)+f(c) \qquad (2)$$

となる．先述のようにもともと接線の定義はあいまいであったが，以上の考察に基づき，改めて (2) で表される直線を $y=f(x)$ の点 $\mathrm{P}=(c,f(c))$ における**接線**であると定義するのである．

3. ε–δ 論法の視覚的理解

さて前節の議論において，$f(x)$ が $x=c$ で微分可能であるとは，h が 0 に近づくとき，(1) の値がある数 A に近づいていくことであると述べたが，このことも数式によって厳密に記述しなければならない．このために考案されたのが ε–δ 論法である．簡単のため，(1) を h を変数とする関数と考え，$g(h)$ とおく．すなわち $h\neq 0$ に対して

$$g(h)=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

とおく．ただし $g(h)$ は $h=0$ のときには定義されていないことに注意する．$h\neq 0$ を 0 に近づけたとき，$g(h)$ がある数 A に近づくとはどのようなことであろうか？ ともかく図に描いて考えてみよう．

いま $g(h)$ のグラフが図 5 のようになっているとする．このときには，図 5 から明らかなように

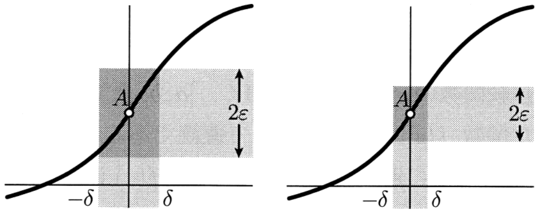


図 5　A を中心にどのように小さな帯を考えても，十分小さな区間 $(-\delta,\delta)$ を，$(-\delta,\delta)$ 上で $g(h)$ の値がその帯の中に含まれるようにできる．例えば右図の ε のほうが左図のそれより小さくとってあるが，そのときには δ をより小さくとれば対処できる．

h が 0 に近づけば $g(h)$ は A に近づく．この場合，例えば A を中心としたどのように小さい幅 2ε の帯を考えても，0 を含む十分小さな区間 $(-\delta,\delta)$ をとれば，$(-\delta,\delta)$ 上で $g(h)$ がとる値はすべて考えている帯の中に入るようにできる．そこでこの現象を数式を使って記述して見よう．次のようになる．

(P)　どのような正の数 ε を考えても，ある正の数 δ を選んで，$|h|<\delta$ をみたす h に対しては

$$|g(h)-A|<\varepsilon$$

となるようにすることができる．

そこで，『h が 0 に近づけば $g(h)$ は A に近づく』とは，すなわち (P) が成り立つことであると定義することにする．これによりあいまいだった表現『h が 0 に近づけば $g(h)$ は A に近づく』を厳密な数学的表現にすることができた．この定義に基づいて微分積分に関する議論を進めていくことを **ε–δ 論法**と言う．なお (P) が成り立つとき，$g(h)$ は $h\to 0$ とするとき**極限** A をもつと言い，

$$\lim_{h\to 0} g(h)=A$$

と表す．この記号を用いれば，

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \qquad (3)$$

と書くことができる．以上のことをまとめれば，本稿の冒頭で述べた微分可能であることの定義に

到達する．

極限の定義をしたので，あとの議論で必要になる連続関数の定義を述べておく．$[a,b]$ 上で定義された関数 $f(x)$ が $c \in [a,b]$ で**連続**であるとは，$x \in [a,b]$ を c に近づけたとき，$f(x)$ が $f(c)$ に近づくことである．すなわち，どのような正の数 ε に対しても，ある $\delta > 0$ を選んで，$x \in [a,b]$ が $|x-c| < \delta$ をみたす限り $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ となるようにできることである．このことを $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ と表す．$[a,b]$ のすべての点で連続なとき，$f(x)$ を $[a,b]$ 上の**連続関数**と言う．

4. 積分の考え方の視覚的な説明

高等学校の教科書では，積分は微分の逆演算として定義される．すなわち $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して，$F'(x) = f(x)$ $(x \in (a,b))$ をみたすような $[a,b]$ 上の連続関数 $F(x)$ が存在するとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**と言い，$F(b) - F(a)$ を $f(x)$ の $[a,b]$ 上での**定積分**と言う．そして

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

と表す．定義としては単純であるが，しかしあまりに形式的過ぎてこの定義からは $F(x)$ が一体どのような関数であるのかをすぐに読み取ることができない．結論を先に言えば，例えば $f(x) \geqq 0$ の場合，$f(x)$ の $[a,b]$ 上での定積分は，$[a,b]$ と $y = f(x)$ とで挟まれる領域の面積を表している（図 6 参照）．本稿では，なぜ不定積分から定義される定積分が図 6 で示された部分の面積と考えることができるのかを，視覚的に説明する．この考察は自然にリーマン積分の定義へとつながっていく．

まず区間 $[a,b]$ に

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \qquad (4)$$

のような分点をとる．このとき

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\ &= F(t_n) - F(t_{n-1}) \\ &\quad + F(t_{n-1}) - F(t_{n-2}) \\ &\quad + \cdots + F(t_1) - F(t_0) \qquad (5)\end{aligned}$$

と書ける．いま $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ とおき，

$$e_i = \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{\Delta_i} - f(t_{i-1}) \qquad (6)$$

とおく．(6) を変形して，(5) に代入すると

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta_i + \sum_{i=1}^{n} e_i \Delta_i \quad (7)$$

となる．まず (7) の右辺の第 1 項の意味を考えてみよう．図 7 はその第 1 項の $n=4$ の場合のグラフである．Δ_i が図 7 の斜線で示された長方形の一つの底辺であり，$f(t_{i-1})$ がその高さと見なせる．したがって $f(t_{i-1})\Delta_i$ はその長方形の面積であり，$\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta_i$ はそれらの総和となる．ここで分割の数を増やして細かくしていってみよう．すると証明としてではなく視覚的理解としてであるが，図 8 の左から右へのプロセスを経て，次第に $y = f(x)$ と $[a,b]$ で挟まれる部分の「面積」に近づいていくことがわかるであろう．

次に (7) の右辺の第 2 項について考える．紙数の都合上，本稿では証明を省くが，$F'(x) = f(x)$

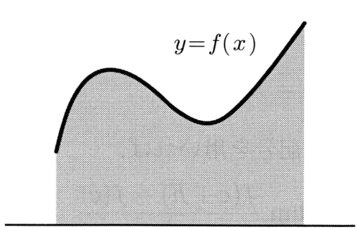


図 6　$f(x) \geqq 0$ の場合，定積分は図の斜線の部分の面積を表している．なぜか？

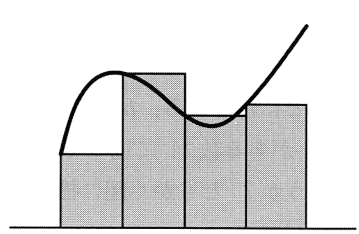


図 7　$n=4$ の場合の第 1 項は斜線の部分の面積を表している．

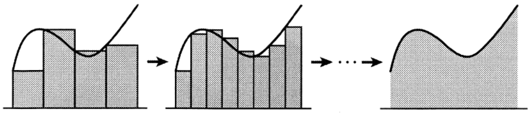


図 8　分割を細かくしていくと第 1 項は $y=f(x)$ と $[a,b]$ で挟まれる領域の面積に近づいていく．

より，$[a,b]$ の分割を十分細かく取って，Δ_i が十分小さくなるようにすれば，それに応じて $|e_i|$ も十分小さな量になることが示せる．実際，どのような正数 ε に対しても，ある正数 δ を選んで，もしも $\Delta_i < \delta$ ならば $|e_i| < \varepsilon$ となるようにできる*1)．そこで，以下ではあらかじめ分割 (4) を十分細かくとって，$\max_i \Delta_i < \delta$ となるようにしておく．さて

$$\left|\sum_{i=1}^{n} e_i\Delta_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |e_i\Delta_i| < \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta_i = \varepsilon(b-a)$$

である．このことは，分割 (4) を十分細かくとって $\max_i \Delta_i$ が小さくなるようにすれば

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta_i + \text{微小誤差}$$

であることを意味している．さらに分割を細かくしていけば，“微小誤差”$\to 0$ となり，結局視覚的には

$$\int_a^b f(x)dx = \text{“}y=f(x) \text{ と } [a,b] \text{ で挟まれる面積”}$$

と考えることができる．

ところで大学で学ぶ微分積分では，定積分を $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i-1})\Delta_i$ の極限として定義する．ここで ξ_{i-1} は $[t_i, t_{i-1}]$ の点である．つまり $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で**積分可能**であるとは，$[a,b]$ の分割 (4) を細かく取り，$\max_i \Delta_i$ が 0 に近づくようにするとき，分割と ξ_i の取り方によらず $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i-1})\Delta_i$ が一定の数 A に近づくことであると定義するのである．そしてその値 A を $\int_a^b f(x)dx$ により表す．このような方法で定義される定積分を**リーマン積分**と言う．$[a,b]$ 上の連続関数は積分可能であることも証明される．さて，リーマン積分の定義から，定積分が面積であることがすぐに理解できるが，逆に

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

としたとき $F'(x) = f(x)$ となることが，自明なことではなくなる．このことを示す定理が次の微分積分の基本定理である．証明は例えば文献 1) を参照してほしい．

定理 1　$f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続な関数とする．このとき $f(x)$ は $[a,b]$ 上で積分可能であり，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \quad x \in (a,b)$$

が成り立つ．

5. 多変数関数の微分

前節までに扱ったような 1 変数関数の場合に比べ，2 変数以上になると，関数を理解することは急にハードルが高くなる．その理由の一つは，変数が増えると，「方向」という新しい情報が加わり，解析がそれだけ複雑になることにある．また，私たちの目が外界の情報を網膜という 2 次元曲面に一度投影していることにも原因の一端はあると考えられる．1 変数の関数の場合，そのグラフは 2 次元であるが，関数が 2 変数になると，グラフは 3 次元になる．しかし私たちは網膜から伝送される 2 次元的情報を頼りに脳の中で 3 次元的な世界像を組み立てなければならない．そのため 2 変数関数のグラフが，1 変数に比べ把握しにくいのである．またグラフを描くときも，脳が 3 次元的な仮象を組み立てやすいように工夫しなければならない．

最後に，2 変数関数のグラフを用いながら，2 変数の微分が 1 変数のように単純でないことを示す．1 変数の場合，微分は接線と密接に関係し，それは (3) により定義された．このことから，2 変数関数の場合，微分可能性は接平面が存在することと関

*1)　例えば平均値の定理と有界閉区間上の連続関数の一様連続性を用れば容易に示せる．

係があることが期待できる．一方，(3) を 2 変数で考えるとどのようになるだろうか．一つの考え方は，2 変数関数 $f(x,y)$ の点 $c=(c_1,c_2)$ における微分可能性を調べるのに，c を通る様々な直線にそって 1 変数と同様の考察をすることである．直線の方向は 2 次元の単位ベクトル $v=(v_1,v_2)$ により表される．そこで (3) の 2 変数への一般化として，任意の単位ベクトル v に対して

$$\nabla_v f(c_1,c_2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c_1+v_1h,c_2+v_2h)-f(c_1,c_2)}{h}$$

が存在することを $f(x,y)$ は c において (全方向に関して) **方向微分可能**と定義する．特に $e_1=(1,0)$ と $e_2=(0,1)$ に関する方向微分が多変数関数の解析では重要な役割を果たし，これらは

$$\nabla_{e_1} f = \frac{\partial f}{\partial x},\quad \nabla_{e_2} f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

と表される．しかし残念ながら全方向に関して方向微分可能であっても，$(c,f(c))$ において曲面 $z=f(x,y)$ の接平面が存在することにはならない．例えば

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4},\quad (x,y)\neq(0,0)$$

とし，$f(0,0)=0$ とする．この場合，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で全方向に関して方向微分可能である．しかし図 9 からもわかるようにグラフ $z=f(x,y)$ は原点でつながっておらず切れ目があり，接平面を考えることはできない．

接平面の存在を保証するような微分可能性は全微分可能性と呼ばれるものである．$f(x,y)$ が c で**全微分可能**であるとは，次のことをみたすような数 A,B が存在することである：任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ を選んで，$\sqrt{h^2+k^2}<\delta$ ならば

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}|f(c_1+h,c_2+k)-f(c_1,c_2) - Ah-Bk|<\varepsilon$$

が成り立つようにできる．全微分可能ならば，すべての方向に関して微分可能であり，$A=\nabla_{e_1}f(c)$，

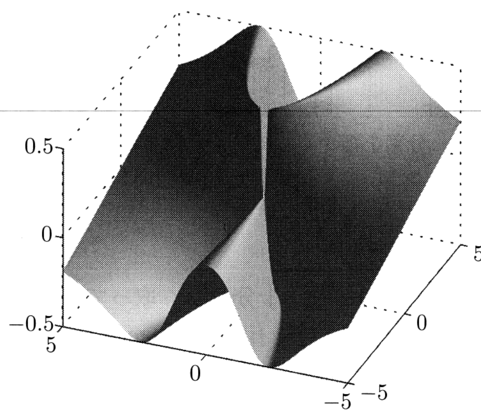


図 9　原点でグラフに切れ目がある．

$B=\nabla_{e_2}f(c)$ となることが容易に証明できる．なお接平面の方程式は

$$z-f(c_1,c_2)=A(x-c_1)+B(y-c_2)$$

によって定義される．

以上示したことは一例であるが，多変数の場合には多次元ならではの複雑さが出てくる．その複雑さは関数のグラフなどを描き，視覚的な観察が理解の強力な補助になることもある．

6. おわりに

本稿では，微分積分の基礎概念のいくつかを視覚的に理解できるように解説した．この方向で微分積分を学びたい読者は，例えば拙著[1)]，浦川[2)]，ハイラー–ヴァンナー[3)]などをご覧いただきたい．本稿の描画には，MATLAB と Adobe Illustrator を用いた．

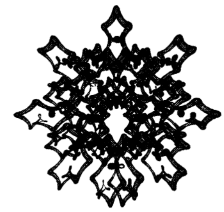
参考文献

1) 新井仁之，『微分積分の世界』，日本評論社，2003.
2) 浦川肇，『微積分の基礎』，朝倉書店，2006.
3) E. ハイラー，G. ヴァンナー（蟹江幸博訳），『解析教程』，上，下，シュプリンガー・ジャパン，2006.
4) ボイヤー，『数学の歴史』，1–5（加賀美鐵雄，浦野由有訳），朝倉書店.

（あらい・ひとし，
東京大学大学院数理科学研究科/JST さきがけ）

いろいろな変換を視覚的にとらえる

メビウス変換とステレオ図法を中心として



今井　淳

1. はじめに

まず最初に，**変換**とは，ある空間 X から自分自身への写像のこととします．ここでは簡単のため，以下 X は 2 次元とします．

例　X をユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ とします．$\mathbb{R}^2$ の**合同変換**とは，任意の 2 点間の距離を変えないような変換です．合同変換は距離だけでなく，角度も変えません．合同なものは，位置と向きを除けば何もかも同じです．いわば，一番ガチガチな変換です．

G_1 を $\mathbb{R}^2$ の合同変換全体のなす集合とし（合同変換**群**と呼ばれます[*1)]），$\mathbb{R}^2$ と G_1 のペアを考えます．任意の合同変換は，回転，折り返し，平行移動いくつかの合成として表すことができます．このことを，合同変換群は回転，折り返し，平行移動で**生成**される，と言います．ユークリッド幾何学は，G_1 の任意の元（つまり任意の合同変換）で不変な性質を研究する学問であると言えます．

例　$\mathbb{R}^2$ の**相似変換**とは，任意の 2 点間の距離を定数 c $(c > 0)$ 倍するような変換です．相似変換は $c = 1$ でない限り長さを変えてしまいますが，角度は変えません．

相似変換全体の集合を相似変換群と呼ぶと，合同変換は相似変換でもありますから，

$$\text{合同変換群} \subset \text{相似変換群}$$

です．変換の集合が大きくなると，それで不変となる性質の集合は逆に小さくなることに注意しましょう．

このように，ある空間 X とある性質を持つ変換全体の集合 G を考え，G の任意の元で不変な性質を考える，という枠組みが，幾何ではしばしば見られます．この視点を導入したのが**クライン**（1849–1925）で，**エルランゲン・プログラム**と呼ばれます．

以下，大事な変換をいくつか見ていきましょう．筆者の興味およびグラフィックスの関係で，メビウス変換の記述が多くなっていることを予めお断りしておきます．

2. 線形変換

$\mathbb{R}^2$ の**線形変換**とは，ある実 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ により $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表すことができるような変換のことを言います．線形変換は，和とスカラー倍を保つ，すなわち，

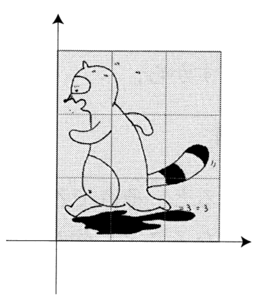
$$F(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x}) + F(+\boldsymbol{y})$$
$$F(c\boldsymbol{x}) = cF(\boldsymbol{x})$$

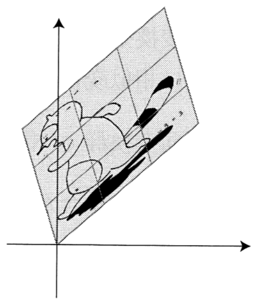
$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2, \forall c \in \mathbb{R})$ の 2 つで特徴づけられま

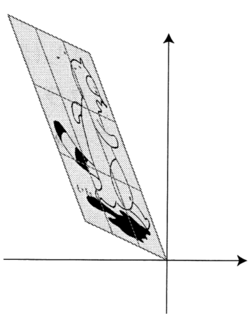
*1)　以下＊＊変換全体の集合を＊＊変換群と言うときには，写像の合成を演算として，この集合に群の構造が入るのですが，ここでは群の構造については扱いません．

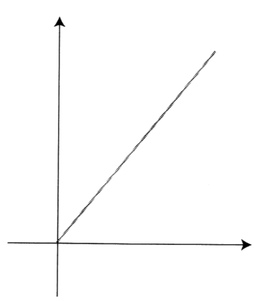
す．線形変換で，長さや角度は保たれませんが，直線は直線に移ります．特に，原点を通る直線はまた原点を通る直線に移ります．ただし，A の行列式 $|A|$ が 0 の場合には，1 点に潰れてしまう直線もあります．また，内分点という関係も保たれます．

第 1 象限の単位正方形（図 1）は平行四辺形（図 2）に移ります．$|A| < 0$ のときは逆向きに（図 3），$|A| = 0$ の場合は線分に潰れて（図 4）しまいます．さらに A が零行列の場合は，原点 1 点に潰れてしまいます．


図 1　$A = E$.


図 2　$|A| > 0$.


図 3　$|A| < 0$.


図 4　$|A| = 0$.

原点の回りの角度 θ の回転や x 軸に関する折り返しも線形変換で，それぞれ，$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対応します．

線形変換で，逆変換が存在するようなもの全体を考えます．実 2 次行列の言葉で言えば，正則な（つまり逆行列を持つような）実 2 次行列全体の集合で，これは 2 次実一般線形群と呼ばれ，$\boldsymbol{GL(2,\mathbb{R})}$ と書きます．

線形変換は最も基本的な変換です．私は，図 2 と図 3 を元々のイラストから Illustrator というソフトを用いて作ったのですが線形変換はこのソフトがやってくれました．

3. アフィン変換

3.1 アフィン変換とは

$\mathbb{R}^2$ の**アフィン変換**とは，ある実 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ により $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$ と表すことができるような変換のことを言います．つまり，

$$\begin{cases} F_1(x,y) &= ax + by + u \\ F_2(x,y) &= cx + dy + v \end{cases}$$

と 1 次式で表されるような変換です．線形変換と定数項しか違いませんから，アフィン変換によって，長さや角度は保たれませんが，直線は直線に移り（1 点に潰れる場合も含む），内分点という関係は保たれることになります．ただし，原点の行き先は原点とは限りません．

3.2 関数の微分係数とは

$\mathbb{R}$ のアフィン変換は 1 次式で表されます．関数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の点 x_0 におきる微分係数とは，この関数を点 x_0 の近くで最もよく近似するアフィン変換（$y = f(x)$ のグラフの $x = x_0$ における接線を表すアフィン変換）$y = ax + b$ の（定数項を除いた）線形変換の部分の係数 a に他なりません．

大学 1 年生で，多変数の微分積分を習います．1 変数の場合と同様に，$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x_0}$ における微分係数とは，この関数を点 $\boldsymbol{x_0}$ の近くで最もよく近似するアフィン変換 $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$ の（定数項を除いた）線形変換の部分の係数行列 A になります．

つまり，一般に関数のある点で微分するとは，その関数をその点の近くで最もよく近似するアフィン写像を探すこと，となるのです．

4. 射影変換

射影変換は，今までのような $\mathbb{R}^2$ の上ではなく，射影平面（一般には射影空間）の上の変換です．

4.1 射影平面とは

射影平面とは，$\mathbb{R}^3$ の原点を通る直線全体の集合のことを言い，$\mathbb{R}P^2$ と書きます（P は projective の p です）．各々の原点を通る直線は，それから原点を取り除いたものと 1 対 1 に対応します．直線から原点を取り除いたものは，その中の 1 点を選ぶと，その他の点はすべてその点の零でない定数倍として得られます．このことから，射影平面とは，$\mathbb{R}^3$ から原点を取り除いたものに，「零でない定数をかけると，一方から他方が得られる」という同値関係を入れて，それで割った同値類集合と同じであることが分かります（これを $(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})/\mathbb{R}^\times$ と書きます）．さて，各々の同値類の代表元として，原点から距離が 1 のもの，つまり単位球面 S^2 の点を選ぶことができます．1 つの同値類にはそのような点が 2 つあり，それらは互いに -1 倍ですので，$\mathbb{R}P^2$ は S^2 に $P \sim P' \iff P = \pm P'$ という同値関係を入れ，それで割った同値類集合 $S^2/\pm 1$ とも思えます．局所的には S^2 と同じですので，射影平面は 2 次元空間であることが分かります．

Π を原点を通らない平面とします．$\mathbb{R}P^2$ のうち，Π と平行な直線の集合（これは $\mathbb{R}P^2$ の 1 次元の閉部分集合になります）の補集合を U とします．この U は，その閉包が $\mathbb{R}P^2$ となることから，「ほとんど $\mathbb{R}P^2$ 全部と同じ」と考えられます．U の各点 l と，Π と l との交点を対応させることにより，$\mathbb{R}P^2 \supset U$ と Π を同一視することができます．

4.2 射影変換とは

A を正則な実 3 次行列とします．すると A は $\mathbb{R}^3$ の（可逆な）線形変換を定めます．これは，原点を通る直線を原点を通る直線に移しますので，射影平面の変換を引き起こします．これを**射影変換**と言います．$\mathbb{R}^3$ の原点を通らないある平面 Π を固定し，上述の $\mathbb{R}P^2 \supset U \cong \Pi \cong \mathbb{R}^2$ なる同一視の下で，射影変換（のほとんどすべて）を $\mathbb{R}^2$ の変換として「視る」ことができます．このとき，直線は直線に移りますが，正方形の行き先はもはや平行四辺形にはなりません．

射影幾何学は面白いトピックなのですが，ここでは深入りは止めて，参考書を最後に挙げるに止めることにします．

5. メビウス変換

5.1 メビウス変換とは

メビウス変換は $\mathbb{R}^2$ と無限遠点 $\{\infty\}$ を合わせたものの変換です．$\mathbb{R}^2$ の合同変換は回転と折り返しと平行移動いくつかの合成として表すことができました．$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ の**メビウス変換**とは，次に述べる円に関する反転いくつかの合成として表すことのできる変換のことを言います．

ここで，中心 C 半径 r の**円 Γ に関する反転**とは，C を ∞ へ，∞ を C へ，C と異なる $\mathbb{R}^2$ の点 P を，半直線 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ 上にある点 P′ で，$|\mathrm{CP}||\mathrm{CP}'| = r^2$ を満たす点 P′ へ移す変換を言います（図 5）．円周上の点は動きません．

メビウス幾何学では，直線は半径が無限大で無限遠点を通るような円として扱います．その場合，直線に関する反転とは，その直線に関する折り返し（線対称）になります．

原点を通る 2 直線で，そのなす角が $\theta/2$ となるものに関する折り返しを続けて行うと，角 θ の回転になります（図 6 左）．平行な 2 直線に関する折り返しを続けて行うと，平行移動になります（図 6 右）．また，半径の異なる同心円に関する反転を続けて行うと，拡大・縮小写像が得られます．このことから，メビウス変換全体の集合をメビウス変換群と呼ぶと

$$\text{メビウス変換群} \supset \text{相似変換群}$$

が分かります．

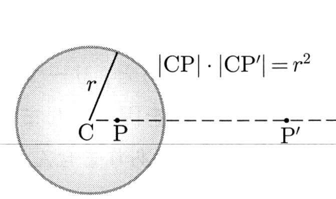


図 5　円 Γ に関する反転．

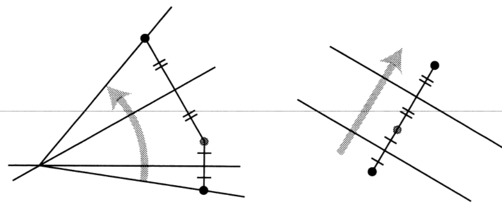


図 6　回転と平行移動.

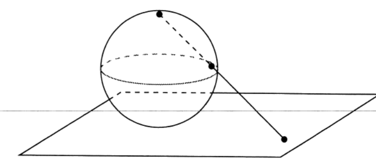


図 7　立体射影.

5.2 メビウス変換の性質

メビウス変換には，次の 3 つの特徴があります：

(1)　円を円に移す（直線は円に含めます）.

(2)　顕微鏡的には，相似変換である（このことを共形写像である，と言います）．したがって，角度を保つ*2)，ということが従います.

(3)　非調和比を変えない，またはその複素共役に移す.

2 つ目はちょっと分かりにくい表現ですね．その意味するところは以下の通りです．T をメビウス変換とすると，$\mathbb{R}^2$ の各点 P に対してある正の定数 A_{P} が存在して，点 P で交わる任意の 2 曲線 c_1, c_2（$c_1(t_1) = c_2(t_2) = \mathrm{P}$）に対して，$c_1$ と c_2 の T による像の，点 $T(\mathrm{P})$ における接ベクトルの内積は，c_1 と c_2 の点 P における接ベクトルの内積の A_{P} 倍になる：

$$(T \circ c_1)'(t_1) \cdot (T \circ c_2)'(t_2) = A_{\mathrm{P}}(c_1'(t_1) \cdot c_2'(t_2))$$

ということです.

$\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視すると，原点中心半径 1 の円に関する反転は，z を $1/\bar{z}$ に対応させる変換になります．したがって，メビウス変換の等角性は複素関数論の初歩で習う一次分数変換の等角性から従います.

メビウス変換は角度は保ちますが，長さ（の比）は保ちません．顕微鏡的には，相似変換でも，巨視的に見れば，長さの比率が点によって変わってしまうからです（専門的に言うと，リーマン計量を保たない，と言います）．円を円に移しますが，その中心を中心に移すわけではありません．また，「円のちょうど反対側にある」（対蹠点と言います）という関係も保たれません．メビウス変換は，昔から知られているものではありますが，通常のユークリッド幾何に慣れ切っていると，戸惑う（というか，筆者の経験では，勘違いする）ことが多い代物です.

百聞は一見にしかず，メビウス変換の動画が参考文献 4) にありますので，是非ご覧ください.

5.3 球面のメビウス変換

$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ は 2 次元球面 S^2 と同一視することができます．位相的には 1 点コンパクト化ですが，今の場合は，具体的に立体射影 (stereographic projection) で得られます．これは，$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^3$ の $\{z = -1\}$ の平面と同一視し，原点中心半径 1 の単位球面の北極 $(0, 0, 1)$ に光源を置いて投影するものです（図 7）．この同一視を通じて，$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ のメビウス変換から S^2 のメビウス変換が得られます.

この投影は，地図を作るときの図法の一つで用いられます．このことについては後述します.

実はこの立体射影自体，$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ のメビウス変換で得られます．円に関する反転とまったく同様に，球面に関する反転が定義できます．上述の立体射影は，中心が $(0, 0, 1)$ 半径 2 の球面に関する反転を S^2 に制限したものになります．このことから，立体射影は角度を保ち，S^2 の円を $\mathbb{R}^2$ の円または直線に移すことが分かります.

5.4 $S^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ の光錐の中での実現

さて，メビウス変換は，それ自体はアフィン変換とは大分違うように見えます．ところが実は，メビウス変換も今までの変換同様，行列を用いて表すことができます．ただし，2 次行列ではありません．このことを解説しましょう.

天下り的ですが，4 次元のミンコフスキー空間

*2)　角度を保つ写像を等角写像と言います.

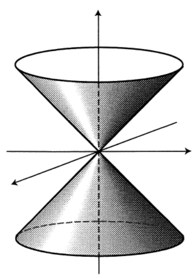


図 8　光錐.

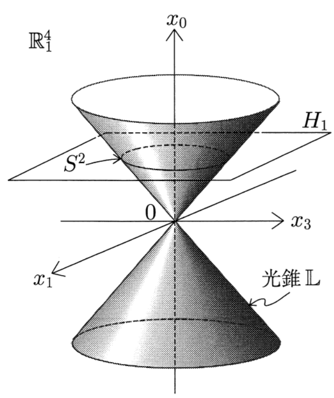


図 9　S^2 の光錐の中の実現.

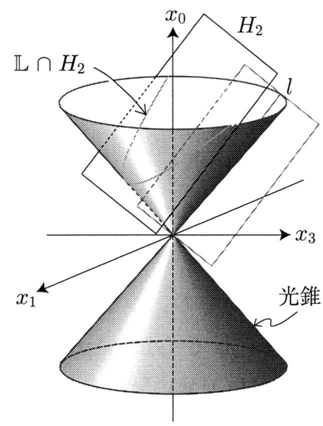


図 10　$\mathbb{R}^2$ の光錐の中の実現.

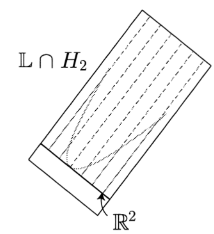


図 11　放物面と $\mathbb{R}^2$ の同一視.

$\mathbb{R}^4_1$ を用います．これは，$\mathbb{R}^4$ に不定値内積

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

を入れたものです．通常のユークリッド空間とは異なり，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と自分自身の内積 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ は正にも負にも 0 にもなります．$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ で $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ となるベクトル全体と原点を合わせたもの

$$\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4_1 \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$$

を，相対性理論の用語を用いて，**光錐**と言います（図 8）．光錐を $\mathbb{L}$ と書くことにします．光錐を $\{x_0 = c\}$ $(c \neq 0)$ という超平面で切ると，$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2$ という半径 $|c|$ の球面が得られます．光錐はこの球面の各点と原点とを結ぶ直線の和集合となります．

光錐の中の原点を通る直線全体の集合を考えます．これは，光錐の“射影空間”と思えますので，$\mathbb{L}P$ と書くことにしましょう．

(1) 各々の直線は超平面 $H_1 = \{x_0 = 1\}$ と唯一点で交わりますから，$\mathbb{L}P$ と $\mathbb{L} \cap H_1$ とを同一視することができます．$\mathbb{L} \cap H_1$ は超平面 H_1 の単位球面になるので，$\mathbb{L}P \cong S^2$ なる同一視が得られます（図 9）．

(2) 一方，H_2 を，光錐と直線 l で接する超平面と平行な超平面とします．すると，$\mathbb{L}P$ のうち，l 以外の直線はみな H_2 と唯一点で交わります．よって $\mathbb{L}P \setminus \{l\}$ は $\mathbb{L} \cap H_2$ と同一視することができます（図 10）．$\mathbb{L} \cap H_2$ は超平面 H_2 内の回転放物面になります．これを，その頂点で接する平面に正射影することにより（図 11），$\mathbb{R}^2$ と同一視することができます．このことより，$\mathbb{L}P \setminus \{1\text{点}\} \cong \mathbb{R}^2$ なる同一視が得られます．

以上 2 つの同一視を合わせると $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{L}P \setminus \{1\text{点}\} \cong S^2 \setminus \{1\text{点}\}$ が得られます（図 12）．実はこの同一視は，S^2 から取り除く点に光源を置いた立体射影（図 7）になります．

5.5 ミンコフスキー空間でのメビウス変換の実現

$GL(4, \mathbb{R})$ を 4 次実一般線形群，言いかえると逆変換を持つような $\mathbb{R}^4$ の線形変換全体のなす集合とします．この中で，ミンコフスキー空間の不

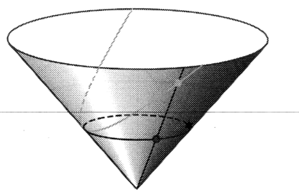


図 12　光錐の中での $S^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

定値内積を変えないもの，つまり，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4_1$ に対して $\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ となるような $A \in GL(4,\mathbb{R})$ 全体の集合を $\boldsymbol{O(3,1)}$ と書いて，ローレンツ群と言います．言いかえると，不定値内積に関する“合同変換”全体のなす集合ということになります．

ローレンツ群 $O(3,1)$ の元 A はミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^4_1$ の各ベクトルのノルムを変えないので，光錐をそれ自身に移します．また，A は $\mathbb{R}^4$ の線形変換でもありますので，原点を通る直線を原点を通る直線に移します．この 2 つを合わせると，$O(3,1)$ の元 A は $\mathbb{L}P$ の変換を誘導します．これを $\mathbb{L}P \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ なる同一視の下で $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ の変換と考えたものがメビウス変換になります．

$\mathbb{R}^2$ の円または直線は，この設定では，光錐と原点を通るある 3 次元超平面との交わりとして得られます．$O(3,1)$ の元 A は原点を通る 3 次元超平面を原点を通る 3 次元超平面に移します．メビウス変換が円または直線を保つことは，このことからも分かります．

5.6 ステレオ投影の地図とメビウス変換

立体射影で地図を作ることを平射方位図法またはステレオ図法と言います（図 13）．平射方位図法は航空図に適した図法です．特に，南極または北極からの立体射影では，経線が原点からの放射状に伸びる直線に，緯線が原点中心の同心円になります．

異なる地点に光源を置いて立体射影をすると，当然異なる地図が得られます．$i = 1, 2$ として，p_i を S^2 の点 P_i に光源を置いて得られる平面 Π_i への立体射影とします．Π_i を $\mathbb{R}^2$ と同一視し，それを通じて $p_2 \circ p_1^{-1} : \Pi_1 \to \Pi_2$ を $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ の変換と思うと，これはメビウス変換になります．実は逆に，

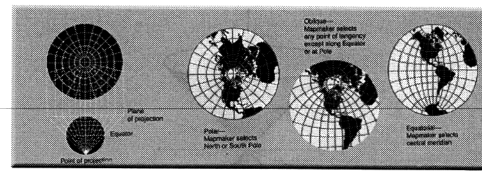


図 13　平射方位図法による地図（参考文献 3)）．

$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ のメビウス変換は，相似変換の分を除くと，ある点から立体射影して得られた地図を別の点から立体射影して得られた地図にすることで得られる．

ということも成り立ちます．とても美しい映像が “Dimensions”（J. Leys, E. Ghys, A. Alvarez）という DVD の第一章にあります．これはオンラインでも見ることができます（参考文献 5)）．

6. 最後に

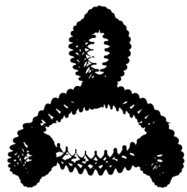
さて，今まで見てきた変換全体のなす集合（合同変換群，線形変換群，メビウス変換群など）は，すべて有限次元になります．よって，いくつかの（有限個の）点の行き先が決まれば，残りすべての点の行き先が分かってしまうことになります．それでは，もっと沢山の変換を考えるとどうなるでしょうか．例えば，ふにゃふにゃなものまで許すと，位相変換群が得られ，これは無限次元となります．位相変換はほとんど何でもアリの状態で，長さも角度も直線であることも保たれません．鉄道の時刻表の日本地図がその例で，線路のつながり方だけが保たれています．位相変換（同相写像）で変わらないもの（**位相不変量**と言います）は，トポロジーの研究の中心的な問題である，とコメントだけして，この解説を終えたいと思います．

参考文献

1)　秋月康夫，滝沢精二：『射影幾何学』共立出版．
2)　郡　敏昭：『射影平面の幾何学』遊星社．
3)　http://ja.wikipedia.org/wiki/
ファイル：Usgs_map_stereographic.PNG
4)　http://www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY
5)　http://www.dimensions-math.org/Dim_reg_JP.htm

（いまい・じゅん，首都大学東京大学院理工学研究科）

曲線をよくみる



足助 太郎

1. 曲線とは？

平面上の曲線は可視化するまでもなく目に見える図形の一つです．いくつか例を挙げてみましょう．例えば円や放物線，双曲線は曲線です（図 1）．名前の付いた曲線は他には例えばサイクロイド，カージオイド（カルジオイド）と呼ばれるものなどがあります（図 2）．これらの曲線のいくつかは無限にのびていますが，そのような場合にはその一部を描いてあります．ここに挙げた曲線たちは，多少曲がっていたり折れていたりしてもそれを無視すれば直線に見えます．その意味では直線も曲線と言えます．一方，Y の字のように枝分かれしていたり，8 の字のように交わりがある図形は曲線のような，そうでないような何とも言い難いところです．ここでは話を単純にするためにこのような図形は考えないことにします．また，明らかに曲線ではない図形もあります．例えば点や平面，中身が詰まった球体やあるいはその表面などの図形は常識的には曲線ではありません．実際，これらの図形を直線のように考えるのは難しそうです．そこで「曲線とは，多少の曲がり具合や折れ具合を無視すれば直線に見える図形である」ということにしてみます．これを数学的に表すと以下のようになります．

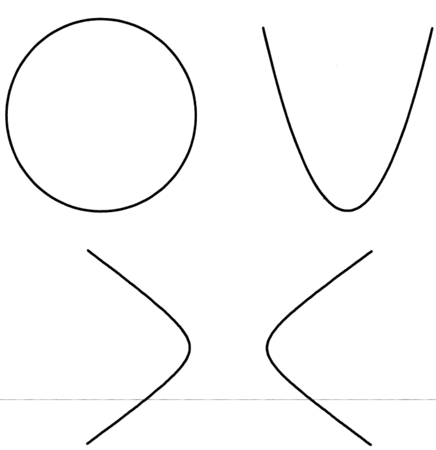


図 1　円（左上）・放物線（右上）・双曲線（下）．

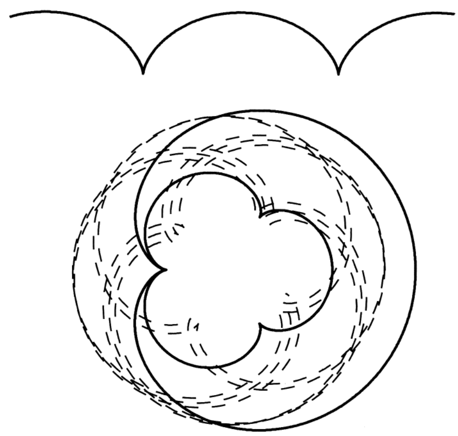


図 2　サイクロイド（上）・カージオイド（下）．

記号 1.1. • $\mathbb{R} = \{$実数$\}$ とする．

• $I = [0,1] = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \le t \le 1\}$ とする．

• xy-平面を $\mathbb{R}^2$ で表す．$\mathbb{R}^2$ の点は (x,y) のように実数を二つ並べて表す．

定義 1.2. C を $\mathbb{R}^2$ 内の図形とする．C が**曲線**である*1) とは，連続かつ単射な写像（函数）$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$（あるいは $f\colon I \to \mathbb{R}^2$）について $C = \{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$（あるいは $C = \{f(t) \mid t \in I\}$）が成り立つことである．

*1)　厳密に言えばここで定義しているのはジョルダン（Jordan）曲線です．

C が曲線であるというのは，条件をみたすような f が最低一つは存在するということです．また，写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ が**連続**というのは t が s に近づくと $f(t)$ も $f(s)$ に近づくということで，数式を用いると

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$$
$$|t-s| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(s)| < \epsilon$$

と表されます．$f\colon I \to \mathbb{R}^2$ の場合には上の式の最初の部分は $\forall s \in I$ に変わります．一方，写像 f が**単射**というのは，$f(t) = f(s)$ ならば $t = s$ が成り立つということです．

直感的な意味での曲線のほとんどは定義 1.2 の意味での曲線です[*2)]．いくつか例を挙げてみます．

例 1.3. 1) a, b を実数とし，少なくとも一方は 0 ではないとします．$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ とすると L は直線ですが，定義 1.2 の意味では曲線です．実際，$C = L$ として

$$f(t) = \left(\frac{bt - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-at - bc}{a^2 + b^2}\right)$$

とすれば，C と f は定義 1.2 の条件をみたします．

2) $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1,\ x > 0\}$ とすると H は曲線です．実際，$C = H$ として

$$f(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$$

とすれば，C と f は定義 1.2 の条件をみたします．H は双曲線です．また，$H' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1,\ x < 0\}$ とすると H' も双曲線ですが，H' を表す写像は上の f と少し異なります．是非考えてみて下さい．

2. 曲線の長さ

曲線を「測る」代表的な方法に長さを測ることが挙げられますので，ここでは曲線の長さについて考えてみます．線分（直線の一部）の長さは三平方の定理（ピタゴラスの定理）を用いて求めることができます．

定理 2.1. L を $p = (x,y)$, $q = (z,w)$ を結ぶ線分とする．L の長さを $d(p,q)$ で表すと[*3)]

$$d(p,q) = \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}$$

が成り立つ．

このことを用いて曲線の長さを定めることができます．C を $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ により与えられる曲線とします．曲線は大雑把に見れば直線に見えるのでしたから，多少の曲がりを無視して折れ線で近似してみます．そのために，C の端点 $f(0), f(1)$ をそれぞれ p_0, p_r とし，$p_1, \ldots, p_{r-1}$ をこの順番に p_0 と p_r の間にとります．そして，これらの点を順番に結びます（図 3）．こうして得られる折れ線の長さは

$$d(p_0, p_1) + d(p_1, p_2) + \cdots + d(p_{r-1}, p_r)$$

です．この和を $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} d(p_{i-1}, p_i)$ で表します．p を C 上の点とすると，$0 \leq t \leq 1$ をみたす実数 t を用いて $p = f(t)$ と表すことができます．そこで $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$ をみたすような実数 $t_0, t_1, \ldots, t_r$ を用いて $p_0 = f(t_0), p_1 = f(t_1), \ldots, p_r = f(t_r)$ と表すと，折れ線の長さは $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} d(f(t_{i-1}), f(t_i))$ で表されます．これはあくまで折れ線の長さであって，曲線の本来の長さとは必ずしも等しくありません．元の曲線に図形として近い折れ線の長さは，曲線の本来の長さに近いと期待されますので，近似の度合いを高めていきます．そのためには，一般的には点（図 3 では大きく丸で描いてあります）の数を増やす必要がありますが，点の数を増やすと折れ線の長さは長くなる傾向にある（図 4）ので次のように定めます．

定義 2.2. $C = \{f(t) \mid t \in I\}$ を曲線とする．

$$l(C) = \sup_{\substack{r>0 \\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_r=1}} \sum_{i=1}^{r} d(f(t_{i-1}), f(t_i))$$

と置き，$l(C)$ を C の**長さ**と呼ぶ．

ここで sup は上限のことで，大雑把に言えば最大値です．定義の代わりに例で示すと，$t \leq 1$ をみたすような実数 t の最大値と上限は共に 1 です．一方，$t < 1$ を

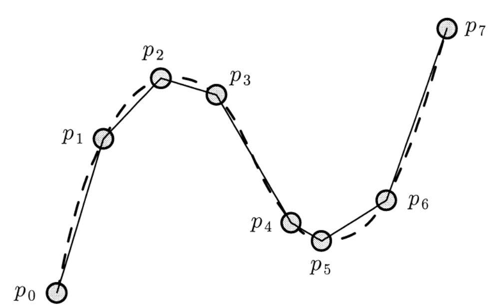


図 3　曲線を折れ線で近似する（$r = 7$ の場合）．破線が元の曲線．

---

*2)　円などを考えるためには**閉曲線**という概念が必要ですが，ここでは省略します．

*3)　(p,q) で表される点に d が付いたわけではないので注意して下さい．p や q はあくまで $\mathbb{R}^2$ 上の点です．

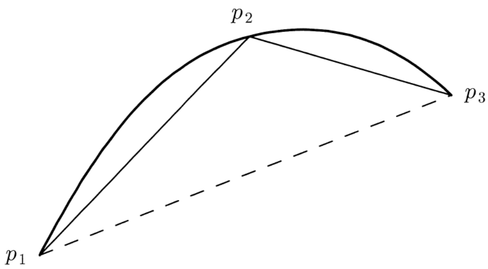


図4　p_2 を加えることにより折れ線の長さが長くなる．

みたすような実数 t の最大値は存在しませんが，上限は 1 です．

C が円周などの長さがよく知られた曲線である場合 $l(C)$ はその長さと一致することが示せます．計算は一般には面倒になり，その度合いは曲線によって異なります．例えば円は簡単ですが放物線はかなり難しいです．ここでは C が線分であるときに $l(C)$ と三平方の定理から求まる長さが一致することを確かめてみます．

例 2.3. $C = \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ とします．$f\colon I \to C$ を $f(t) = (t, 0)$ で定めれば C は f で与えられる曲線です．$r > 0$ とし，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$ とします．t_{i-1} と t_i の大小関係に注意すると

$$\begin{aligned} d(f(t_{i-1}), f(t_i)) &= \sqrt{(t_{i-1} - t_i)^2 + (0-0)^2} \\ &= t_i - t_{i-1} \end{aligned}$$

が成り立ちますから

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{r} d(f(t_{i-1}), f(t_i)) \\ &= (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \cdots + (t_r - t_{r-1}) \\ &= t_r - t_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

が従います．これは r や t_i たちの選び方には無関係ですから，これらの選び方をいろいろ変えて最大値をとって得られる値も 1 です．したがって $l(C) = 1$ が成り立ちます．一般の線分 C についても同様に計算することができます．

3. さまざまな曲線

ここではいくつかの曲線について調べてみます．

例 3.1. 図5のグラフは**悪魔の階段**と呼ばれる曲線で（D とします），次のように描くことができます．まず $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ と $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ を結ぶ水平な線を描きます（第一段階・図 6）．次に $(0, 0)$ を固定して水平方向に $\frac{1}{3}$ 倍，垂直方向に $\frac{1}{2}$ 倍した図と，$(1, 1)$ を固定して水平方向に $\frac{1}{3}$ 倍，垂直方向に $\frac{1}{2}$ 倍した図を重ね合わせます（第二段階）．さらにこれを繰り返すと図7が得られます．この操作は無限に続き，終えることはできないのですが，「極限」と呼ばれる最終的な状態を数学的に考えると曲線 D が得られます*4)．$l(D)$ を求めるために，第 k 段階における隙間に斜めの線を加えて得られる折れ線を D_k とし，D の近似と考えます（図 8）．折れ線 D_k の長さは次のように求まります．まず，斜めの線を加える前の水平部分の長さを求めます．第一段階では $\frac{1}{3}$ の長さの線分が一つです．隙間が左右に一つずつ存在し，次の段階ではそこに線分が新たに現れます．一般に第 k 段階において初めて現れる水平部分は 2^{k-1} 個の線分からなり，一つの線分の長さは $\frac{1}{3^k}$ です．したがって D_k の水平部分の長さは

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{3}\frac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^k}{1 - \dfrac{2}{3}}$$

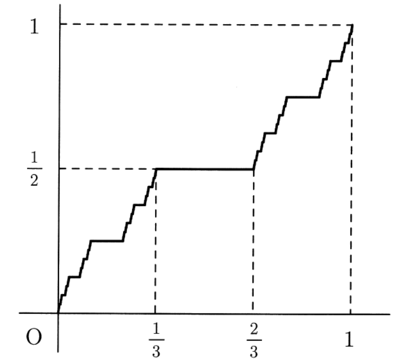


図5　悪魔の階段（Devil's ladder）．

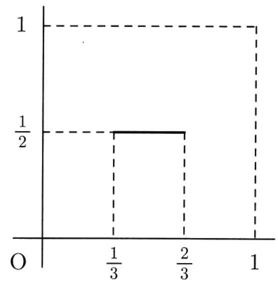


図6　第一段階．

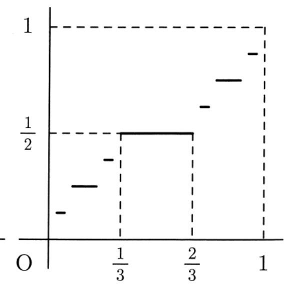


図7　第三段階．

*4）実は図5は最終的な状態ではなく，第十段階に少し手を加えたものです．

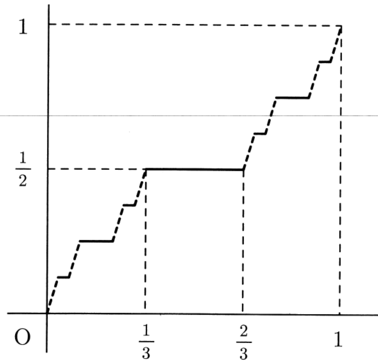


図 8　D_3.

です．一方，描き加えた斜めの線は 2^k 本存在し，一本あたりの長さは $\sqrt{\left(\frac{1}{3^k}\right)^2+\left(\frac{1}{2^k}\right)^2}$ ですから，D_k の斜めの部分の長さは

$$2^k\sqrt{\left(\frac{1}{3^k}\right)^2+\left(\frac{1}{2^k}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}+1}$$

です．したがって D_k の長さは

$$\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1-\frac{2}{3}}+\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}+1}$$

です．k を大きくしていくと D_k は D に近づきますが，一方 D_k の長さは

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}+\sqrt{1}=2$$

に近づきます．このことを用いてもう少し議論すると $l(D)=2$ であることがわかります．つまり，D の長さは $(0,0)$ から真横（右）か真上にジグザグに進んで $(1,1)$ まで進んだときの道のりに等しいのですが，このことは D は見た目に反して斜めになっている部分がないことを示しています．

例 3.2. 図 9 のグラフは**高木函数**と呼ばれる函数のグラフで（T とします），次のようにして得られます．まず斜辺の長さが 1 の直角二等辺三角形を考えます（第一段階）．次に斜辺の長さが $\frac{1}{2}$ の直角二等辺三角形を二つ並べ，先の直角二等辺三角形に積み上げます（第二段階・図 10）．図 11 は一段階飛ばした第四段階のグラフです．この操作の極限として T が得られます．途中の段階は折れ線による T の近似と考えられますが，この長さは段階を追うごとにいくらでも長くなっていきます．したがって $l(T)$ は無限大です．

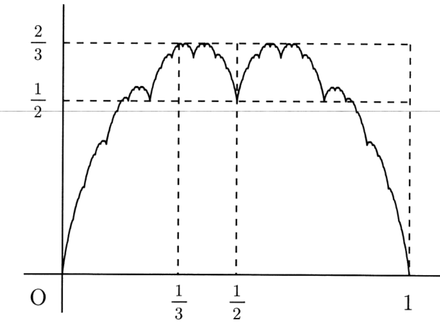


図 9　高木函数のグラフ．

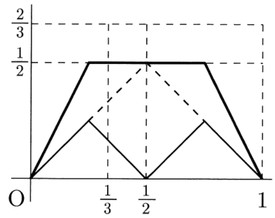


図 10　第二段階．

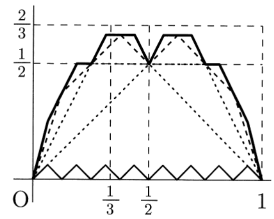


図 11　第四段階．

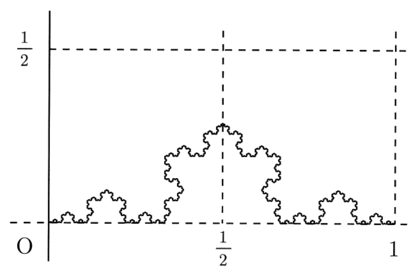


図 12　コッホ曲線．

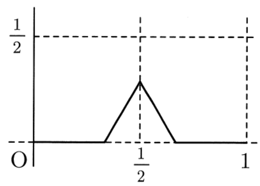


図 13　第二段階．

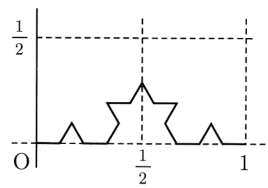


図 14　第三段階．

例 3.3. 図 12 の曲線は**コッホ（Koch）曲線**と呼ばれるもので（K とします），次のようにして得られます．まず $(0,0)$ と $(1,0)$ を結ぶ線分を考えます（第一段階）．その真ん中の三分の一を正三角形で置き換え，底辺は除きます（第二段階・図 13）．この後は線分の真ん中に山を逐次作っていきます．例えば第三段階は図 14 のようになります．一段階ごとに長さが $\frac{4}{3}$ 倍されていきますから $l(K)$ はやはり無限大です．

4. 曲線を測る

高木函数のグラフ T やコッホ曲線 K は見るからに異なりますが，長さを用いたのでは区別できません．これらをどう区別すればよいか，考えてみることにします．平面上の図形を区別する量には長さの外には例えば面積があります．しかし T や K の面積は 0 ですので面積を用いてもこれらは区別できません．そこで，長さや面積がどのように定まるのか反省してみます．曲線の長さは折れ線で曲線を近似してその長さを測り，その精度を上げていくことで定義するのでした．面積も長さと同様に四角形で図形を近似して定義することができます（図15）．このままでは近似に用いる図形が異なりますが，対角線を用いれば曲線の長さを近似するときにも正方形を用いることができます（図16）*5)．すると，長さを測るときには正方形の一辺の長さ*6)，面積を測るときには正方形の一辺の長さの二乗を足し上げることになります．これを次のように一般化してみます．まず，曲線 C を一辺の長さが高々 r の正方形 $R_1,\ldots,R_k$ で近似し，

$$h_s^r(R_1,\ldots,R_k)=\sum_{i=1}^{k}(R_i\text{ の一辺の長さ})^s$$

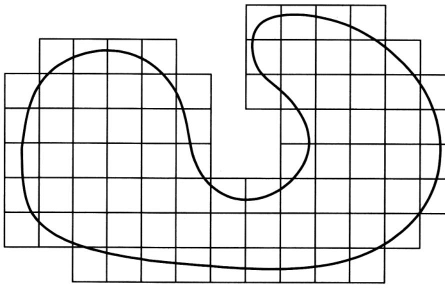


図 15　面積の定義の仕方．

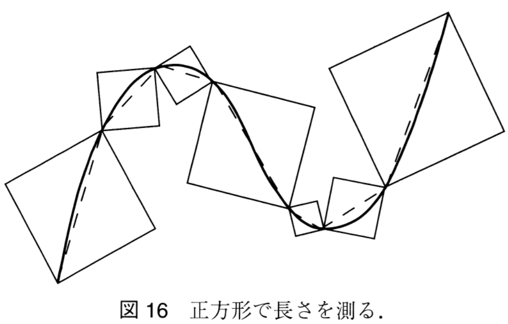


図 16　正方形で長さを測る．

と定めます．とりあえず r を固定し，ありとあらゆる正方形による近似を考え

$$H_s^r(C)=\inf_{\text{近似 } R_1,\ldots,R_k} h_s^r(R_1,\ldots,R_k)$$

と置きます*7)．近似ごとに k は変化して構いません．inf は下限と呼ばれ，長さを定めたときに用いた sup の「最小値」版です．$H_1^r(C)$ は定義 2.2 に現れた折れ線の長さに当たるのでそれを真似て

$$H_s(C)=\sup_{r>0}H_s^r(C)$$

と定め，C の s **次元ハウスドルフ（Hausdorff）測度**と呼びます．上限を考えていますが，実際には $H_s(C)$ は r を小さくしていったときの $H_s^r(C)$ の極限であると考えて構いません．すると $H_1(C)$, $H_2(C)$ はそれぞれ長さ，面積に相当します．また，$H_0(C)$ は C に含まれる点の数に相当します．線分や正方形と H_s の値には次のような関係があります．例えば L を線分とすると面積 $H_2(L)$ は 0 です．また，長さ $H_1(L)$ は有限の値です．そして，L に含まれる点の数 $H_0(L)$ は無限大になります．一方，S を正方形の境界および内部とすると $H_2(S)$ は有限の値であって，$H_0(S)$ や $H_1(S)$ は無限大になります．一般に，s を変化させると H_s は以下のような値あるいは状態をとることがわかります．

s	0		1		2	
$H_s(L)$	∞	∞	有限	0	0	0
$H_s(S)$	∞	∞	∞	∞	有限	0

共通しているのは，図形 C に対して境目に当たる値 α が存在して，$s>\alpha$ であれば $H_s(C)=0$, $s<\alpha$ であれば $H_s(C)=\infty$ が成り立つということです．任意の図形 C に対してこのような α が常に存在することがわかる*8)ので次のように定めます．

定義 4.1. C を $\mathbb{R}^2$ 内の図形とする．

$$\begin{aligned}\dim_H C&=\inf\{s\mid H_s(C)=0\}\\&=\sup\{s\mid H_s(C)=\infty\}\end{aligned}$$

と置き，$\dim_H C$ を C の**ハウスドルフ（Hausdorff）次元**と呼ぶ．

*5)　曲線によってはどうしても正方形が重なってしまうこともありますが，それは気にしないことにします．

*6)　正確にはその $\sqrt{2}$ 倍ですが無視して構いません．

*7)　本当は $H_s^r(C)$ の定義は正しくなく，もう少し工夫する必要があります．

*8)　少し回りくどいのですが，例えば $C=T$ である場合などのように $H_\alpha(C)$ が有限の値をとらないこともあるのでこのようにしています．

線分や直線のハウスドルフ次元は 1，正方形のハウスドルフ次元は 2 です．D や T, K のハウスドルフ次元はいくつでしょうか．一般に図形 C について $\dim_H C = s$ とすると，$H_s(C)$ は C を近似する正方形の一辺の長さの s 乗を足し上げた量でよく近似されます．ここで C の見かけの大きさを r 倍した図形を rC とします．近似する正方形も含めて図形の大きさを一斉に r 倍すると，近似している正方形の辺の長さの s 乗は r^s 倍されますから，$H_s(rC) = r^s H_s(C)$ であると考えられます．したがって

$$s = \log_r \frac{r\text{ 倍して得られる図形の } s \text{ 次元測度}}{\text{元の図形の } s \text{ 次元測度}}$$

が成り立ちます．今考えている図形についてはこの考察を数学的に正当化することができて，$\dim_H K = (\log 4)/(\log 3)$, $\dim_H T = 1$, $\dim_H D = 1$ であることがわかります．まとめると

曲線	D	T	K
長さ	2	∞	∞
次元	1	1	$\dfrac{\log 4}{\log 3}$

となり，これらの曲線はすべて区別することができます．

例 4.2.（ヒルベルト（**Hilbert**）曲線）．図 17 は $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ で囲まれた正方形を塗りつぶした図形です（R とします）．図 18, 図 19, 図 20, $\cdots$ のようなグラフを順番に考えていくと，極限として連続な写像 $f\colon I \to R$ であって $R = \{f(t) \mid t \in I\}$ であるようなものが得られます． R と f の組のことを**ヒルベルト曲線**と呼びます．その長さは無限大で，面積は 1 です．実は f は単射ではないのですが，R を少し変えると上に述べたのとほぼ同様な方法で面積が 0 でない曲線が得られます．このような曲線のハウスドルフ次元は 2 です．一般に $1 \le s \le 2$ をみたす任意の実数 s について $\dim_H C = s$ となるような平面上の曲線が存在することが知られています．$\dim_H C > 1$ であれば C の長さは無限大ですし，$\dim_H C < 2$ であれば C の面積は 0 です．

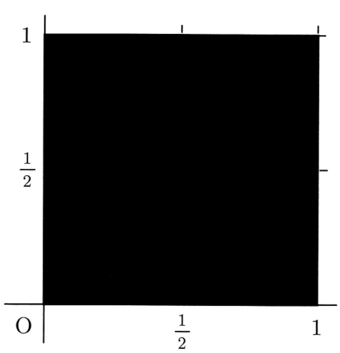


図 17　正方形.

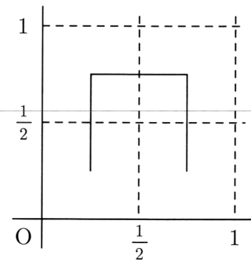


図 18　第一段階.

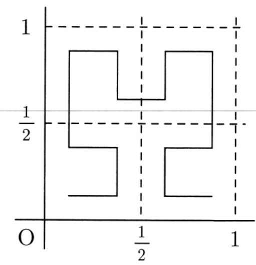


図 19　第二段階.

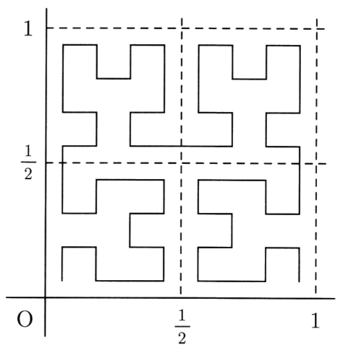


図 20　第三段階.

このように，曲線という一見簡単な対象でもそれを数学的に捉えることは意外に難しいことなのです．

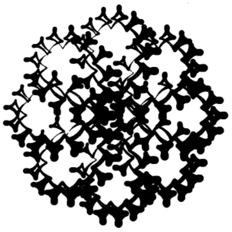
最後に参考文献を挙げておきます．文献 1) は大学初年度の微積分学の知識があればおおよその雰囲気をつかむことができると思います．文献 2) はもう少し専門的で，学部 3 年生程度の知識が必要です．

参考文献

1) 谷口雅彦著，『フラクタル曲線についての解析学—擬等角写像外伝—』，培風館，2004.
2) K.J. ファルコナー著，畑 政義訳，『フラクタル集合の幾何学』，近代数学社，1989.

（あすけ・たろう，東京大学大学院数理科学研究科）

幾何学の様々な構造を視る



坪井　俊

1. どんな構造があるか

幾何学は図形を対象とする数学である．私も幾何学の研究者である．図形を理解することがどういうことかは，説明しにくい問題であるが，幾何学者がよく理解できた図形をもとに数学のいろいろな問題に取り組んでいるのは確かであると思う．

平面図形を扱っているときは，それを図示することで，いろいろなことがわかる．立体図形の形をとらえるのは容易ではないが，しばしば模型を作ることができる．模型を作ると多くのことがわかる．東京大学大学院数理科学研究科の資料室には，19 世紀終わりから 20 世紀初めに作られた石膏の模型などがあり，それを見ると，様々な図形を理解しようとした先人の気持ちが伝わってくるような気がする（日本数学会 数学通信 14 巻 2 号の河野俊丈氏の「幾何学模型アーカイブからの眺望」 http://mathsoc.jp/outreach/shimin-index.html を参照）．立体図形を説明することは容易なことではないが，それでもその実体となる図形があるという前提に立ってものごとを説明していく安心感というようなものがある．

しかし，空間自体の次元が高い場合には，高い次元そのものが，容易には理解されないし，空間上の構造を問題にしている場合には，何を見せているかわからないということが起きてくる．

数学で扱う図形というものには，位相や距離などが定義されていて，その形を理解したいということになるのだが，そこには，どういうものを同じと考えるかという同値関係が入っていて，図形は，ある構造を持った集合の同値類として定義されている．

現代の幾何の数学的な研究で，最初に学ぶことは，形や構造が同じであることを示すためには，同値を与える写像を実際に作る，あるいは作ることができることを証明する必要があり，逆に，形や構造が違うことを示すためには，同値であれば同じ値をとる不変量を定義し，その値が異なることを示さなければならないということである．このように考えると図示することには何の重要性もないように思われるかもしれない．実際，得られた定理には，あるいはその証明には，図形の形がどのようであるかに言及しないもののほうが多いと思う．直感的な図形の理解は間違えやすいので，証明自身はそういう形には書かないのである．しかし，よい証明を読むと，図形の形が自然に見えてくるものであり，また，新しい定理の発見，証明に，最も必要なものの一つが，図形の形の理解で

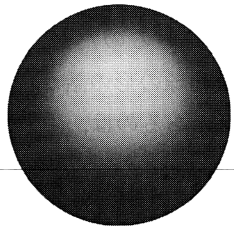


図 1　球面．

あることは，幾何学者に共通の理解だと思う．

図1は球面であるが，球面に対する図形的な感覚は，人々に共通のものであると思われる．このような感覚を共通のものとして確認しながら，いろいろな構造を説明することができるのではないかというのが，グラフィックスを用いて説明を試みている理由である．その試行の過程で思わぬ発見があった．一つは，3次元空間内で曲面として描いたものも，視点や照明などの設定によって，ほとんどの場合，それらしくは見えないということである．また，動いているものは，形がわかりやすいということである．後で少し説明するつもりの葉層構造についての私のウェブページ

`http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/showroom/animations/foliations.html`

では，静的な対象のはずの葉層構造を動くものとして表示している．葉層構造の起源の一つである力学系理論は，システムの変化を扱うものだから，時々刻々変化する様子を図示すればかなりのことがわかる．それを考慮して葉層構造のアニメーションを作ってみた．また，静的な曲面であっても，それを回転させる，視る側の視点を動かす，あるいは照明を移動させることで，理解が進むことがわかる．それは誰でもが，普段目の前のものの形を確かめるときに行っていることである．

2. 空間に一番良い構造を考える

“DIMENSIONS” という Jos Leys, Étienne Ghys, Aurélien Alvarez が作ったビデオがある．このビデオの日本語版の作成，そのダウンロードサービスやDVD配布をウェブページ

`http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/dim_jp/`

を作って手伝っているのだが，この “DIMENSIONS” の話は地球の形の話から始まる．球面が非常に美しい形であるのは，誰でも理解できていると考えよう．このイメージから，3次元球面をどのようにして理解できるかを考える．“DIMENSIONS” でも説明しているが，複素2次元空間 $\boldsymbol{C}^2$ の原点から距離が1の点全体である3次元球面 S^3 は，実2次元空間 $\boldsymbol{R}^2$ の原点から距離が1の点全体である円周 S^1 と近い性質を持っている．円周 S^1 に対し原点を通る任意の直線は，2点で交わるが，3次元球面 S^3 に対し原点を通る任意の複素直線は，円周で交わる．2点は加減乗除を持つ実数 $\boldsymbol{R}$ の原点から距離が1の点に対応し，円周は，加減乗除を持つ複素数 $\boldsymbol{C}$ の原点から距離が1の点に対応する．これらは群であり，群の作用の軌道がそれぞれの交わりの集合である．この軌道を1点と見ると，複素射影直線である2次元球面（リーマン球面）が得られる．

この様子がホップ・ファイブレーションという構造である．式で書いたほうがはっきりされる方のためには，

$$S^3 = \{(z, w) \in \boldsymbol{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

上の $U(1) = \{u \in \boldsymbol{C} \mid |u| = 1\}$ の（スカラー倍による）作用を $u(z, w) = (uz, uw)$ で定義すると，$(z_1, w_1), (z_2, w_2)$ が同じ軌道にあることと，$\frac{z_1}{w_1} = \frac{z_2}{w_2}$ は同値となり，この軌道を1点と見た空間 $S^3/\sim$ は，リーマン球面，すなわち，$\frac{z}{w}$ の空間である $\boldsymbol{C}$ に無限遠点を付け加えて得られる $\boldsymbol{C}P^1$ と一致する．そこで，この $U(1)$ 作用あるいは写像 $S^3 \longrightarrow \boldsymbol{C}P^1$ をどう見るか，どう見せるかが問題である．この様子を描いたもので最も気に入っているのは，図2である．これは，リーマン球面 $\boldsymbol{C}P^1$ 上の南極の近くにある9個の小円板の逆像として得られるソリッド・トーラスを3次元球面 S^3 の1点から3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ へのステレオグラフ射影（後述）で写したものである．リーマン球面の北極の逆像の1点からのステレオ

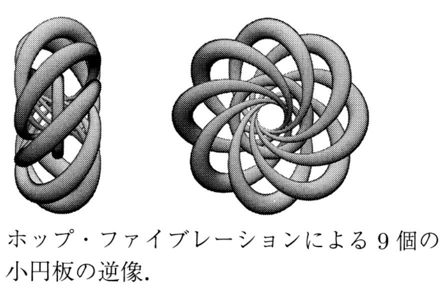


図2　ホップ・ファイブレーションによる9個の小円板の逆像．

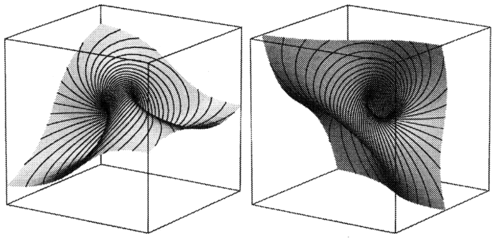


図3　ホップ・ファイブレーションによる経線方向の大円の逆像.

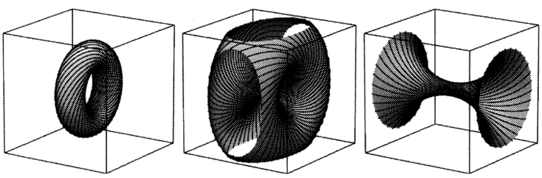


図4　ホップ・ファイブレーションによる緯線の逆像.

グラフ射影をとっている．ソリッド・トーラスどうしがリンクしている様子が見られる．3 次元球面 S^3 のいたるところでこのようになっているというのがホップ・ファイブレーションの姿である．

リーマン球面を経線方向の大円で 2 つに切ったとき，3 次元球面 S^3 は，大円の逆像のトーラスで 2 つのソリッド・トーラスに分けられている．そのトーラスを $U(1)$ 作用の軌道とともに描くと，図 3 のようになる．また，緯線の逆像を描いて一緒に眺めるとよい（図 4 参照）．実際には，緯度による変化あるいは経度による変化をアニメーションで見るとよりよくわかる（前出の私のウェブページを参照）．リーマン球面内の円周の逆像のステレオグラフ射影による像がデュパン・サイクライドと呼ばれていることは，“DIMENSIONS” の翻訳中に知ったことであるが，このトーラス上には，4 通りの円周の族による分割がある．これが “DIMENSIONS” 第 8 章の内容である．

実は 3 次元球面 S^3 はハミルトンの 4 元数体の原点から距離が 1 の点であり，それ自身群である．3 次元球面 S^3 の上で 2 乗して -1 になる（複素数 i の役割を担える）点の全体はちょうど $1, -1$ と等距離にある 2 次元球面となる．可能な自由な円周作用（ホップ・ファイブレーション）も 2 次

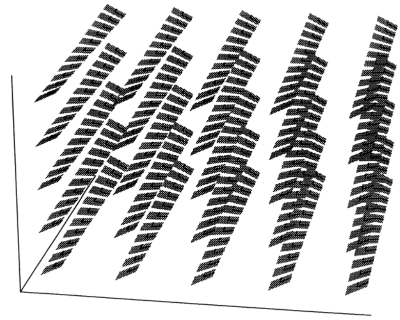


図5　$\boldsymbol{R}^3$ の標準的接触構造.

元球面と同じだけある．このときの円周作用はすべて 3 次元球面の等長変換であり，その軌道はすべて 3 次元球面 S^3 の大円である．

ホップ・ファイブレーションのファイバー（$\boldsymbol{CP}^1$ の 1 点の逆像）の大円に直交する接平面場を考えると，これは，3 次元球面 S^3 の標準的接触構造と呼ばれるものである．この標準的接触構造は 1 点の外では，$\boldsymbol{R}^3$ 上の微分 1 形式 $\mathrm{d}z - y\mathrm{d}x$ で定義される $\boldsymbol{R}^3$ の標準的接触構造と同型である．これを図 5 に示した．

ステレオグラフ射影は，球面

$$S^n = \{(\boldsymbol{x}, y) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R} \bigm| \|\boldsymbol{x}\|^2 + y^2 = 1\},$$

$\mathbf{s} = (\mathbf{0}, -1)$（または $\mathbf{n} = (\mathbf{0}, 1)$）をとり，

$$\pi_{\mathbf{s}} : S^n \setminus \{\mathbf{s}\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^n \times \{0\} \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$$

を 3 点 $\mathbf{s}, (\boldsymbol{x}, y), \pi_{\mathbf{s}}(\boldsymbol{x}, y)$ が同一直線上にあるという条件により定めたものである．$\pi_{\mathbf{s}}$ は，同様に定義される $\pi_{\mathbf{n}} : S^n \setminus \{\mathbf{n}\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ とともに S^n の座標近傍系を定める．$\mathbf{n}, \mathbf{s}, (\boldsymbol{x}, y)$ を含む平面内で考えると，円上の点 $\mathbf{s}, (\boldsymbol{x}, y)$ と，直径 $\mathbf{ns}$ に直交する中心を通る直線上の点 $\pi_{\mathbf{s}}(\boldsymbol{x}, y)$ について，

$$\|\mathbf{s} - (\boldsymbol{x}, y)\| \cdot \|\mathbf{s} - \pi_{\mathbf{s}}(\boldsymbol{x}, y)\| = 2$$

となり，$\pi_{\mathbf{s}}$ は点 $\mathbf{s}$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の球面についての反転であることがわかる．空間の反転の性質から，写像 $\pi_{\mathbf{s}}, \pi_{\mathbf{n}}$ が S^n 内の $n-1$ 次元球面を $\boldsymbol{R}^n$ の $n-1$ 次元球面または $n-1$ 次元平面に写すことがわかり，写像 $\pi_{\mathbf{s}}, \pi_{\mathbf{n}}$ が角度を保つ等角写像あるいは共形写像であることがわか

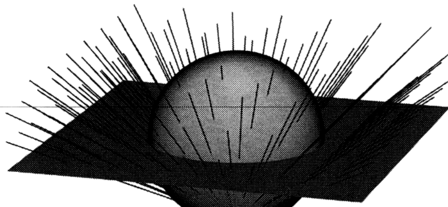


図6　ステレオグラフ射影 π_S.

る．この性質により，ステレオグラフ射影による像は S^3 内の配置の幾何をよくわかる形で表現している（図6）.

これらのことを踏まえて，もう一度，図2〜図4を見ていただくと，3次元球面 S^3 の構造が見えてくる．

3. 2次元トーラス上のベクトル場

図3，図4のトーラスは円周で埋め尽くされている．これは，トーラス上の最も簡単なベクトル場が生成するフローの軌道である．

2次元トーラス上の零点を持たないベクトル場が生成するフローの様子は，よくわかっているのだが，それを的確に表示するのは必ずしも容易ではない．図7左図は2次元トーラス上の一つの円周方向に回転するフローの様子であり，その軌道である円周の族で埋め尽くされている様子を描いたものである．これは，図3，図4のトーラス上のフローと同型であるが，3次元空間への埋め込まれ方が異なっている．図7左図のトーラス上でフローの方向を変化させると，図7右図のようになり軌道は閉じないこともあり得る．図7左図のトーラスを4個のアニュラスの和となるように考えて，そのアニュラスの境界だけが閉軌道であるようなフローもある．それが，図8左図，右図である．図から，この2つの違いがわかっていただければ幸いである．実は，トーラス上のフローは，上に挙げたようなフローの組合せとなることがわかっている．

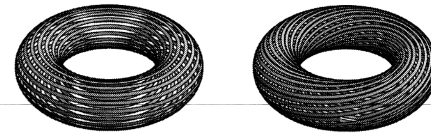


図7　回転による軌道とその方向を変えたもの.



図8　4つの閉軌道を持つフロー.

4. レーブ葉層

構造には，表示しやすい構造としにくい構造がある．表示しにくいものを表すには当然工夫がいる．葉層構造は空間が部分多様体の層に分割されているという構造である．このような構造に着目したのはエーレスマンである．最初に考えられた葉層は，ファイブレーションのファイバーによるもの，リー群の局所自由作用の軌道によるものであると思われる．フロベニウスの定理により積分多様体の局所的な存在の条件が確立し，どのような積分多様体があるかが問題にされるようになった．そうして得られる葉層構造の記述の上で重要なのが，ポアンカレが天体力学の研究で必要から導入したフローの再帰写像に対応する葉のホロノミーである．葉のホロノミーはエーレスマンとレーブにより，定式化された．3次元球面の滑らかな葉層構造を構成したのはレーブである．このような葉層構造の存在は，ホップが1935年に問題として提出しており，1944年のエーレスマン・レーブの論文に掲載された（フランス語ですが，ヘフリガー氏の “Naissance des feuilletages, d'Ehresmann-Reeb à Novikov” http://www.unige.ch/math/folks/haefliger/Feuilletages.pdf 参照）.

このレーブの葉層は，先ほど述べたホップ・ファイブレーションの赤道の逆像のトーラスで3次元球面を2つのソリッド・トーラスに分解したのち，そのそれぞれにレーブ成分を配置して作られている．レーブ成分は図9に断面を示したソリッド・

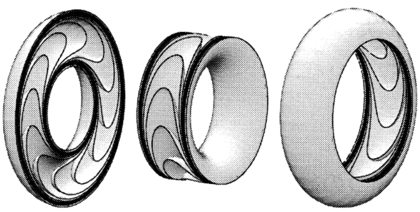


図 9　レーブ成分．

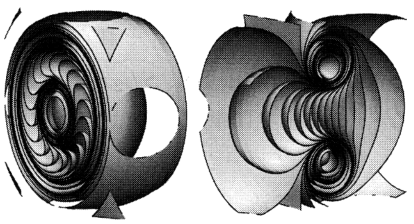


図 10　3 次元球面のレーブ葉層．

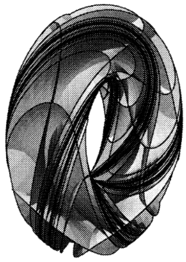


図 11　2 つの横断的なレーブ葉層．

トーラスの葉層構造である．3 次元球面のレーブ葉層を葉の巻き付き具合を表せるように描いたものが，図 10 である．この図は葉層構造の 2 つの断面を示している．葉のホロノミーとは，葉の上の閉曲線に沿って横断的円板（余次元が 1 の場合は線分）をとり，その円板上の点を同じ葉の上にあるように閉曲線に沿って移動させるとき，一回りして戻ったときに円板の原点の近傍から円板に誘導される微分同相写像である．この図のレーブ成分の境界のトーラスに見られる微分同相写像が，トーラスの片側では恒等写像であるが，反対側では原点への縮小写像あるいは拡大写像となっていることが，この葉層が実解析的ではないことを物語っている．実解析的な葉層が 3 次元球面に存在するかどうかは，レーブの葉層の構成とともに問題として出されたものである．ヘフリガー氏は，1956 年に実解析的な葉層構造は，単連結な閉多様体には存在しないことを示した（前出のヘフリガー氏の文章を参照）．

このレーブ葉層を形作るレーブ成分がホップ・ファイブレーションの西半球，東半球の逆像のソリッド・トーラスにあると考え，ともに $U(1)$ 作用に対して同じ向きにあるとしよう．このレーブ葉層を S^3 の中で，$\boldsymbol{C}P^1$ 上では北極，南極を固定する回転となっている回転で移動すると，横断的になる．横断的になった図が図 11 である．よく見ると，図 9 と図 11 の 3 つのレーブ葉層は各点で 3 次元ユークリッド空間の座標平面のように交わっている．このような葉層構造は，Hardolp (1980)，田村・佐藤 (1981)，最近では浅岡・Dufraine・野田により研究されている．

5. アノソフ葉層

閉リーマン多様体では，測地線が定義される．長さ 1 の接ベクトルに対し，その接ベクトルを初期値とする測地線の時刻 t における接ベクトルを与える対応は，リーマン多様体の長さ 1 の接ベクトル全体の空間上のフロー（測地流）を定義する．

2 次元球面は正の定曲率を持ち，その空間上の測地線は大円である．2 次元球面の各点における長さが 1 の接ベクトルの全体 US^2 は，3 次特殊直交群 $SO(3)$ と同一視される．$SO(3)$ は，2 次元球面に作用しているが，2 次元球面の 2 点における長さが 1 の接ベクトルを指定すると，一方を他方に写す $SO(3)$ の元がただ一つ存在する．向きのついた一つの大円に対し，2 次元球面上で大円から最も遠い点が 2 つ定まるが，大円の向きを用いて，その一方を指定できる．2 次元球面の測地流の軌道はすべて円周で，軌道の空間は 2 次元球面となる．実は，$SO(3)$ は 3 次元球面 S^3 を 2 重被覆空間として持ち，測地線は，ホップ・ファイブレーションに対応している．

種数 2 以上の閉リーマン面 Σ は定負曲率を持つことが知られている．この空間の測地流は，長さ 1 の接ベクトル全体のなす 3 次元多様体 $U\Sigma$ 上のフローであるが，アノソフ・フローであり，そ

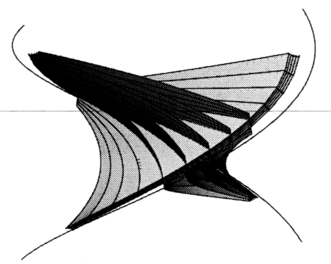


図 12　測地流のアノソフ葉層．

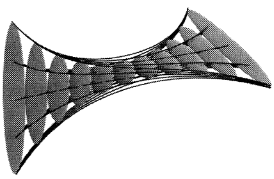


図 13　アノソフ流．

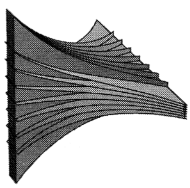


図 14　アノソフ流の安定葉層と不安定葉層．

のフローを含む 2 つの葉層構造を持っている．その様子を描いたものが，図 12 である．

アノソフ・フローは，アノソフにより深く研究され，位相安定性を持つフローであることが示されている．

アノソフ・フローの様子は，球体のフローに沿う変化を示すと，図 13 のようになっている．このフローは，フローに沿ってフローの横断方向の一方が伸び，一方が縮むというダイナミックスを持っている．このようなアノソフ流に対し，図 14 のような 2 つの葉層構造，安定葉層と不安定葉層があり，その交線がフローになっている．安定葉層は近づく軌道の和集合であり，不安定葉層は，フローを逆向きにしたときに近づく軌道の和集合である．この 2 つの葉層構造の存在が，フローの位相安定性を保証している．

図 14 と図 12 は，同じような安定葉層と不安定葉層を描いているが，見てわかる通り，図 14 は真っ直ぐであり図 12 はねじれている．このそれぞれは，実は幾何学的に異なる Sol および $\widetilde{SL_2\boldsymbol{R}}$ に対応している．

6. 8 つの幾何構造

サーストンの幾何化予想のペレルマンによる解決以降，3 次元多様体の理解は 8 通りの幾何の理解から始まることになった．それらは，S^3, $\boldsymbol{E}^3$, $S^2 \times \boldsymbol{E}$, $\mathbf{H}^2 \times \boldsymbol{E}$, Nil, Sol, $\widetilde{SL_2\boldsymbol{R}}$, $\mathbf{H}^3$ などと書かれるが，ここまでに挙げたのは，S^3 に付随するホップ・ファイブレーション（図 2〜図 4），Nil に付随する接触構造（図 6），Sol, $\widetilde{SL_2\boldsymbol{R}}$ に付随するアノソフ流（図 14, 図 12）である．これらの空間では，構造に関わる群作用や力学系から，空間が理解しやすくなるのである．

$\boldsymbol{E}^3$, $S^2 \times \boldsymbol{E}$, $\mathbf{H}^2 \times \boldsymbol{E}$ は，平面，S^2, $\mathbf{H}^2$ による葉層構造を考えると理解しやすい対象である．

局所的に 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{E}^3$ に等長的なコンパクトな多様体は，平坦なコンパクト多様体と呼ばれる．これらは，そのディリクレ領域を考えると表示できる．計量を持つ多様体に対して，その上の 1 点に対するディリクレ領域とは，その点への最短測地線がただ一つであるような開集合（の完備化）のことである．3 次元の平坦なトーラスは，3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{E}^3$ の格子群（ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ と見たときの $\boldsymbol{Z}^3$ と同型な離散部分群）に対応し，そのディリクレ領域は，原点と格子点の垂直 2 等分線についての原点を含む半空間の共通部分となる．それは一般にはある条件を満たす対面が平行な 14 面体になる．これは少し見にくいが，次元を下げると，2 次元の平坦なトーラスのディリクレ領域は，円に内接する対辺が平行な 4 角形または 6 角形になることが，少し考えればわかる．平坦なトーラスの宇宙においては，自分の影があらゆる方向に見えることになるが，その様子は，ある対称性を持っている．これについて，Jeffrey Weeks 氏の CurvedSpaces というソフトウェアがある．

http://geometrygames.org/CurvedSpaces/

最後の $\mathbf{H}^3$ に対しては，これが，一般の3次元多様体の姿とされるのだが，現在のところカスプを持つときの理想単体による分解をカスプにおいて表示して形をうかがい知ることが行われている．しかし，一般の双曲多様体に対しては，難しい問題である．これについても Jeffrey Weeks 氏の SnapPea と，それをもとにした Marc Culler-Nathan Dunfield 両氏の SnapPy というソフトウェアがある．

`http://www.math.uic.edu/~t3m/SnapPy/doc/`

我国でも，秋吉宏尚，作間誠，和田昌昭，山下靖その他の数学者による研究が進展中である．これに関連して，和田昌昭氏は OPTi というソフトウェアを開発，公開されている．

`http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~wada/OPTi/index.html`

双曲多様体上には，大域的構造を保つダイナミックスが存在しないことが理解を難しくしている一つの原因である．ディリクレ領域の形は，面白い対象であるが，平坦な多様体と異なり，2次元でも，3次元でも双曲多様体では位置によって変化するので，どの点についてのディリクレ領域をとればよいかが難しい．というより，そのすべてを同時に考えなければならないので難しいのである．

この問題は離散群の幾何，ある対称性を持った無限グラフの幾何をどうとらえるかという現在の大きな問題に関わっていて，これからの展開がたのしみである．

（つぼい・たかし，東京大学大学院数理科学研究科）

朝倉書店

和算の事典

佐藤健一監修　山司勝紀・西田知己編

A5判 544頁 定価14700円（本体14000円）（11122-4）

江戸時代に急速に発達した和算を歴史から紐解き，さまざまな視点から取り上げる。〔内容〕和算のなりたち／生活数学としての和算／和算のひろがり／和算と諸科学／和算と近世文化／和算の二大風習／和算書と和算家

コンパイラの構成と最適化（第2版）

中田育男著

A5判 624頁 定価10290円（本体9800円）（12177-3）

好評をいただいた初版から10年，以降の進展も折り込み，全体の構成を整理し，さらに新たな章として，レジスタ割付け，データの流れの解析の別法，オブジェクト指向言語での最適化，を設けた。「コンパイラのバイブル」として君臨する内容である。

医学統計学シリーズ8 **統計解析の英語表現** ―学会発表，論文作成に向けて―

丹後敏郎・ベック・タエコ著

A5判 200頁 定価3570円（本体3400円）（12758-4）

発表・投稿に必要な統計解析に関連した英語表現の事例を，専門学術雑誌に掲載された代表的な論文から選び，その表現を真似ることから説き起こす。適切な評価を得られるためには，の視点で簡潔に適宜引用しながら解説を施したものである。

朝倉数学大系1 **解析的整数論 I** ―素数分布論―

本橋洋一著

A5判 272頁 定価5040円（本体4800円）（11821-6）

今なお未解決の問題が数多く残されている素数分布について，一切の仮定無く必要不可欠な知識を解説。〔内容〕素数定理／指数和／短区間内の素数／算術級数中の素数／篩法Ⅰ／一次元篩Ⅰ／篩法Ⅱ／平均素数定理／最小素数定理／一次元篩Ⅱ

朝倉数学大系3 **ラプラシアンの幾何と有限要素法**

浦川　肇著

A5判 272頁 定価5040円（本体4800円）（11823-0）

ラプラシアンに焦点を当て微分幾何学における数値解析を詳述。〔内容〕直線上の2階楕円型微分方程式／ユークリッド空間上の様々な微分方程式／リーマン多様体とラプラシアン／ラプラス作用素の固有値問題／等スペクトル問題／有限要素法／他

〒162-8707 東京都新宿区新小川町6-29
電話 営業部(03)3260-7631 FAX(03)3260-0180
http://www.asakura.co.jp
(ISBN)は 978-4-254- を省略

数学における図の役割

作間　誠



1. 数直線と複素平面

最近のことであるが，オランダ生まれの数学者 A 先生と雑談をしているときに，数字の 1 から 10 までを漢字で書いてくれと頼まれた．お安いご用と，一，二，三，…と書いてみせると，次に「零」を所望された．少し焦ったものの無事に書き終えたところ，それを見た A 先生は，なるほど 0 の概念の難しさがこの漢字の複雑さに反映されていると納得されたのであった．

今でこそ日常生活で当り前のように使われている 0 ではあるが，それが $1, 2, 3, \cdots$ と同じ「数」の仲間であることが人類に認識され，書物にはっきりと書かれたのは，人類の長い歴史から見ると，ごく最近，ようやく 7 世紀になってからのことである．ところが数直線を描くと，それだけ難しい概念であった 0 も，他の自然数と同じように直線上の点として表され，負の数と一緒に併せて心理的な抵抗なしに受け入れることができる．

同様のことは複素数に対しても言える．もちろん，きちんとした数学教育を受けた人，特に数学と毎日関わっている者にとっては，複素数は水や空気のようなものである．しかしながら，一般の学習者，また初めて複素数に遭遇した先人にとっては，2 乗すると -1 になるような「数」は，虚数という用語が示すように心理的に受け入れがたいものであっただろう．ところが複素平面を持ち出すと，$i=\sqrt{-1}$ のような怪しげなものも実数と同じように平面上の点として表現され，虚数に対する心理的障害は払拭される．さらに和と積の幾何学的記述と相俟って，複素平面の世界の素晴らしさに感嘆させせられるのである．

数直線そして複素平面は，人類の英知の結晶である実数と複素数の概念を万人が受け入れることを可能にしてくれている．「図形はまず我々の感覚の助けを借りることによって，精神の弱点を補ってくれる」というポアンカレの言葉は，そのまま数直線と複素平面に当てはまり，これが数学における図の大切な役割の一つであろう．

2. コンピュータが見せてくれる世界

長足の進歩を遂げたコンピュータ技術は，今まで見ることが不可能と思われていた世界を，私たちの目の前に見せてくれるようになり，数学にも革新をもたらした．ここでは，私が受けたいろいろな恩恵について述べよう．双曲幾何支援ソフト「スナッピー（SnapPea）」開発者ウィークスさんと 90 年代初期に行った共同研究により，私たちは結び目に関するある予想に到達し，その予想の解決のヒントはヨルゲンセンによる「穴あきトーラス群」の理論にあると確信した．このヨルゲンセンの理論は，双曲結び目に関するライリーの先駆的研究と共に，サーストンによる 3 次元多様体の幾何構造研究に多大な影響を与えたにも関わらず，未完の論文があるだけで，全貌は明らかになっていなかった．トロント大学留学中であった私は，コロンビア大学のヨルゲンセン先生を訪問し，当時教室主任として多忙の中，3 時間の講義をして頂いたが，残念ながら基礎知識のない私にはさっぱり理解できなかった．しかし，わからないことがあったらいつでもおいで，という言葉に励まさ

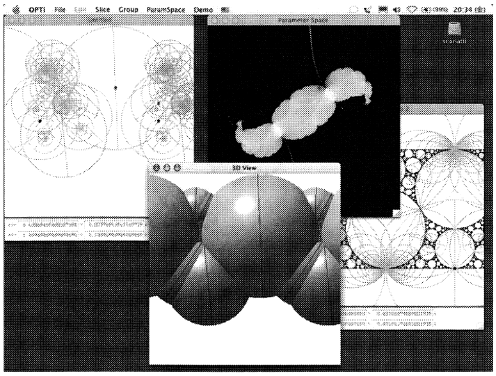


図 1　オプティのホームページ[1]．

れ，数年後，ヨルゲンセン先生を日本にお招きし一週間にわたる連続講義をして頂くことができた．それでも依然として不明な点がたくさん残ったため，講義出席者であった秋吉宏尚さん，和田昌昭さん，山下靖さんと，ヨルゲンセン理論を理解するためのセミナーを開始した．ちなみに和田さんはヨルゲンセン先生の下で学位を取得し，また異なる動機に基づく研究で同じ予想に到達していた．その和田さんはヨルゲンセン理論を可視化するためのソフト（後に「オプティ（OPTi）」と命名）の開発を進め，それが私たちの理解を深めてくれた（図 1）．そして，遂にヨルゲンセン理論に完全な証明をつけ，さらにそれを拡張して，目標であった結び目に関する予想を証明することができた．

山下さんがコンピュータを駆使して描いた図 2[2]が，私たちが得た理解を端的に説明している．正確ではないが大雑把に述べると，この図の色が付いた領域がヨルゲンセン理論が適用できる範囲，色付き領域から伸びているヒゲの部分が，ヨルゲンセン理論の拡張版が適用できる部分，そしてヒゲの先端が予想の対象である結び目に対応する．この一連の研究は，オプティというコンピュータソフトが，人間業では見ることが不可能な世界を可視化してくれて初めて可能になったものである．また，コンピュータが見せてくれた世界を観察することにより，興味深い様々な研究課題が生まれる．実際，図 2 については，気になる研究課題が

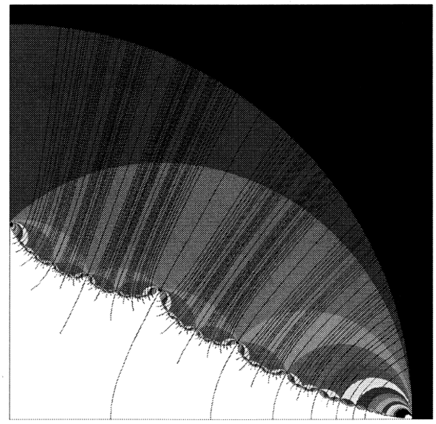


図 2　ライリー切片と 2 橋結び目．

次々と出てくる．それらを解明したいというのが，現在，私の最も重要な研究テーマの一つである．

3. 心の目

もう 6 年以上も前になるが，盲目の数学者ジルー氏の講演を聴く機会があった．ジルー氏は彼の心の中にある 3 次元多様体の接触構造の世界を平明な言葉で丹念に紡ぎ出し，接触構造にあまりなじみのない私にもその美しさを堪能させてくれた．盲目であることは大変な障害であろうが，場合によっては逆にそれ故，表面に見えているものに拘束されることなく（大変な努力の末に）「精神の弱点」を克服し，自由に想像力を羽ばたかせる力を獲得することができるのかもしれない．コンピュータが目の前に見せてくれる神秘の世界にも感嘆するが，心の目で見ることができる世界の奥深さ，そしてそれを伝えることができる言葉の力は，人の感動を呼び起こすのである．

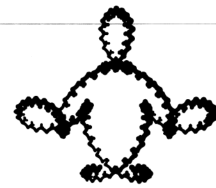
参考文献

1) http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~wada/OPTi/index.html
2) H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, “Punctured torus groups and 2-bridge knot groups I, Lecture Notes in Mathematics”, **1909**. Springer, Berlin, 2007. xliv+252 pp.

（さくま・まこと，広島大学大学院理学研究科）

微分方程式の解の構造を視る

分岐図と相面図



柳田　英二

1. はじめに

数学の問題を解くときに，図を効果的に使うことによって解決に到るということは誰もが経験していることであろう．実際，適切な図は問題を考え易くし正しい方向へと導いてくれるのに対し，逆にまずい図を用いると思考の手助けとならないばかりか，不要な誤りを生じかねない．

図の重要性は幾何学においては言うまでもないが，例えば解析学の問題においても幾何学的考察が必要なときがあり，図を補助的に使うことは少なくない．大学入試などでよく見かける問題に「関数のグラフの概形を描け」というのがあるが，関数の解析的性質よりも，単調性や凸性，極値，極限値などグラフの幾何学的特徴のほうが本質的な場合もよくあることである．本稿の主題である微分方程式においても，図を用いて解の構造を可視化することはしばしば効果的であり本質的でもある．特に求積法で解を求められないときや解の表示式が複雑すぎるときなどに，解の構造についての幾何学的なイメージを描くことにより，解の性質についての正しい推測と解析方法が見えやすくなる．

微分方程式の解析に幾何学的な視点を導入するという考えは，本格的にはポアンカレに始まると言ってよいのだろう．ポアンカレの目的は三体問題の解明であった．三体問題とは「3 個の質点がニュートンの法則に従って運動するときにその軌道を決定せよ」という問題である．よく知られているように，二体問題は求積法によって解くことができ，初期時刻における位置と速度がわかれば軌道を具体的に記述することができる．一方，三体問題は求積法によって解けないことがわかっている．ポアンカレは発想を転換し，解を求めようとするのではなく，解の構造を幾何学的に捉えようとした．そのためにポアンカレは今日の力学系理論に通ずる多くの新しい手法や概念を導入し，大著『天体力学の新しい方法』[6]にまとめ上げた．

その後，力学系理論が整備されるとともに非線形解析学が発展し，微分方程式の解の構造をより直感的に把握するための種々の手法が開発された．本稿の目的はこのような手法についてなるべく理解しやすい形で解説することであるが，微分方程式には様々な形のものがあり，そのすべてについて説明することは無理である．そこで以下では，独立変数 t は時間を表すとし，自励系と呼ばれる時間変数 t について陽に依存しない方程式のクラスに焦点を絞り，時間とともに解がどのように発展していくかを可視化するための手法について解説する．

以下の節では，まず簡単な常微分方程式から始め，解の構造を直感的に理解するための基本的な手法である分岐図と相面図について紹介する．また高階の微分方程式や偏微分方程式の解の振舞いを理解するために，セパレータや安定多様体，不安定多様体などの概念を導入する．これらの手法

や概念は解析的な取り扱いをする際にも大いに役に立つものであるが，一方，あまりに素朴な可視化によって思わぬ間違いを犯す危険性もある．ここでは，偏微分方程式の解の振舞いが素朴な直感に反する例について具体的に説明する．

2. 分岐図

次の常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} u_t = u(u^2 - k), \quad t > 0, \\ u(0) = \alpha. \end{cases} \tag{1}$$

ここで下付の添え字はその変数に関する微分を表す．例えば $u_t := du/dt$ は関数 $u(t)$ の導関数である．この方程式は求積法により解を具体的に計算することもできるが，ここでは方程式そのものから解の性質を導いてみよう．

まず $k \leq 0$ の場合には

$$u_t \begin{cases} < 0 \ \cdots\ u > 0 \text{ のとき} \\ > 0 \ \cdots\ u < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

であるから，どのような初期値に対しても $t \to \infty$ とすると解は 0 に近づいていく．このような状況のとき，平衡解 $u = 0$ は大域的に漸近安定（すべての解を引きつける）であるという．一方，$k > 0$ とすると状況が一変する．この場合にも方程式の右辺の符号を調べることにより，(1) の解は以下のように振る舞うことがわかる．

(i) 初期値が $\alpha < 0$ の範囲にあれば，$t \to \infty$ のとき解は負の平衡解 $-\sqrt{k}$ に収束する．

(ii) 初期値が $\alpha > 0$ の範囲にあれば，$t \to \infty$ のとき解は正の平衡解 $\sqrt{k}$ に収束する．

このとき，平衡解 $u = \sqrt{k}$ と $u = -\sqrt{k}$ は局所的に漸近安定（近傍の解を引きつける）であると言い，平衡解 $u(t) = 0$ は不安定（近傍の解は離れていく）であると言う．したがって解の漸近挙動は初期値 0 を境として大きく異なるが，このような境目の値を閾値と呼んだりする．

以上の考察から，解の具体形を知らなくても (1) の解の構造がほぼ理解できたことになるが，鍵となったのは平衡解とその安定性である．これらがパラメータ k とともに変化する様子を表したのが図 1 で，これは**分岐図**あるいは**分岐ダイアグラム**と呼ばれている．一般に分岐する枝の形は問題に応じて様々であるが，分岐の様子から解の構造とそのパラメータ依存性が一目でわかる．なお後に見るように，分岐図において縦軸はベクトルや関数を 1 次元的に表現していると考えると，高解の微分方程式や偏微分方程式に対しても，パラメータに依存した構造変化を直感的に表すことができる．

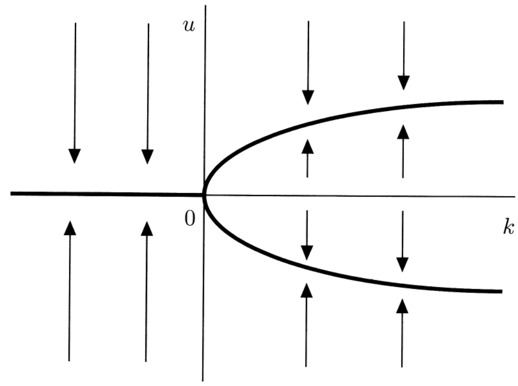


図 1 分岐図.

3. 相面図

次に，連立微分方程式

$$\begin{cases} u_t = (a_1 - b_1 u - c_1 v)u, \\ v_t = (a_2 - c_2 u - b_2 v)v \end{cases} \tag{2}$$

について考えよう．これは競争型ロトカ・ボルテラ方程式と呼ばれ，互いに競争関係にある 2 種の生物からなる生態系をモデル化したもので，a_1, a_2 は内的増殖率，b_1, b_2 は種内競争率 c_1, c_2 は種間競争率を表す正の定数である．$u(t)$, $v(t)$ は各生物種の数あるいは人口密度を表し，初期値 $u(0), v(0)$ が正ならば解 $u(t), v(t)$ はすべての $t > 0$ に対して正の値をとる．

ロトカ・ボルテラ方程式は求積法では解けないが，**相面図解析**と呼ばれる手法を用いて解の挙動を調べることができる．相面図とは，u–v 平面上

に解 $(u(t), v(t))$ を t をパラメータとしてプロットしたもので，相面図を描くには普通，以下のようなステップを踏む．まず，u–v 平面に

$$a_1 - b_1 u - c_1 v = 0, \quad a_2 - c_2 u - b_2 v = 0$$

によって定まる2直線を引く．この直線を**ヌルクライン** (nullcline) と言い，これによって u–v 平面はいくつかの領域に分かれる．各領域では u_t と v_t の符号が一定であり，また解の軌道は各ヌルクラインを垂直方向あるいは水平方向に横切る．これより解 $(u(t), v(t))$ の軌道についておおよその流れがわかる．

ヌルクラインどうしおよび u 軸，v 軸の交点では $u_t = v_t = 0$ が成り立ち，したがって平衡点となる．2本のヌルクラインが1点で交わるとき，方程式 (2) はちょうど4個の平衡点 $\mathrm{A} = (u_\mathrm{A}, 0)$, $\mathrm{B} = (0, v_\mathrm{B})$, $\mathrm{C} = (u_\mathrm{C}, v_\mathrm{C})$, $\mathrm{O} = (0, 0)$ を持つ．ただし，

$$u_\mathrm{A} = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_\mathrm{B} = \frac{a_2}{b_2},$$

$$u_\mathrm{C} = \frac{a_1 b_2 - c_1 a_2}{b_1 b_2 - c_1 c_2}, \quad v_\mathrm{C} = \frac{b_1 a_2 - a_1 c_2}{b_1 b_2 - c_1 c_2}.$$

である．相面図の解の軌道の構造はヌルクラインの交わり方によって異なるが，正の解を考えて第1象限に制限すれば，以下の4つの場合が起こり得る[4]．

(i) $\max\left\{\frac{b_1}{c_2}, \frac{c_1}{b_2}\right\} < \frac{a_1}{a_2}$ のときヌルクラインは第1象限に交点を持たず，平衡点 A は大域的に安定となる．

(ii) $\min\left\{\frac{b_1}{c_2}, \frac{c_1}{b_2}\right\} > \frac{a_1}{a_2}$ のときヌルクラインは第1象限に交点を持たず，平衡点 B は大域的に安定となる．

(iii) $\frac{b_1}{c_2} > \frac{a_1}{a_2} > \frac{c_1}{b_2}$ のときヌルクラインは第1象限に交点 C を持ち，平衡点 C は大域的に安定となる．

(iv) $\frac{b_1}{c_2} < \frac{a_1}{a_2} < \frac{c_1}{b_2}$ のときヌルクラインは第1象限に交点 C を持ち，平衡点 C は不安定，A と B は局所安定となる．

特に (iv) の場合，平衡点 C を通り原点と無限遠を結ぶ滑らかな曲線 $v = h(u)$ が存在し，第1象限内の解は以下の性質を持つ[2]．

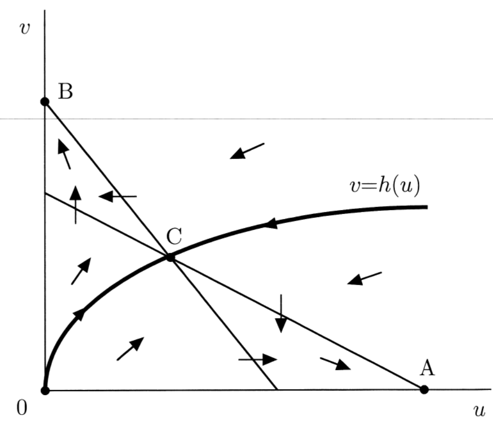


図2　競争系の相面図．

$v(0) < h(u(0))$ ならば A に収束する．

$v(0) > h(u(0))$ ならば B に収束する．

$v(0) = h(u(0))$ ならば C に収束する．

曲線 $v = h(u)$ は2つの局所安定な平衡点 B と C への引き込み領域を隔てており，**セパラトリクス**あるいは**セパレータ**と呼ばれる．以上の様子を表したのが図2であり，相面図上の解軌道の様子が一目で把握できる．

4. 安定多様体と不安定多様体

方程式 (2) は2個の未知変数を持ち，2次元力学系（平面力学系とも言う）の一つの例である．前節で (iv) の場合に見たセパラトリクスは，力学系理論の観点からは平衡点 C の安定多様体と呼ばれているものである．高次元力学系においても，安定多様体および不安定多様体は解の構造を調べる上で必須の概念であり，直観的に構造を捉えるためにも役立つ．

高次元力学系について多少一般的に説明しよう．$u(t)$ を t の n 次元ベクトル値関数とし，これを未知関数とする微分方程式（n 次元力学系）

$$u_t = f(u) \tag{3}$$

を考えよう．ただし，f は $\mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}^N$ への滑らかな関数とする．もしある p に対して $f(p) = 0$

であれば，$u=p$ は平衡点である．$U=u-p$ とおき，(3) の右辺を平衡点 p におけるヤコビ行列 $J(p)$ を用いて

$$f(u)=J(p)U+o(\|U\|), \quad (\|u-p\|\to 0)$$

と展開し高次の項を無視すると，いわゆる**線形化方程式**

$$U_t=J(p)U \tag{4}$$

が得られる．平衡点近傍の解の様子は線形化方程式で近似されるが，それを数学的に保証するのが**ハートマン・グロブマンの定理**[3] である．この定理によれば，方程式 (3) の平衡点 p が双曲型（すなわち行列 $J(p)$ のすべての固有値の実部が 0 でない）であれば，(3) の平衡点近傍の解の構造と線形化方程式 (4) の解の構造が定性的には同じになる．

線形化方程式 (4) は $J(p)$ の固有値と固有ベクトルを使って一般解が求まるから，(3) の双曲型平衡点の近傍については解の構造を捉えることができる．$J(p)$ の固有値の実部の符号によって線形化方程式は安定方向と不安定方向に分離され，負の実部を持つ固有値に対応する固有空間上の解は $t\to\infty$ とすると原点に収束し，正の実部を持つ固有値に対応する固有空間上の解は $t\to-\infty$ とすると原点に収束する．(3) において，(4) の安定および不安定な固有空間に対応するのが，それぞれ平衡点 p の**安定多様体**および**不安定多様体**である．直接的には，平衡点 p に関する安定多様体と不安定多様体は次のように定義される．

$$W^s(p):=\{a\in\mathbf{R}^N:\lim_{t\to+\infty}u(t;a)=p\},$$
$$W^u(p):=\{a\in\mathbf{R}^N:\lim_{t\to-\infty}u(t;a)=p\}.$$

ただし $u(t;a)$ は初期条件 $u(0)=a$ を満たす (3) の解である．平衡点が双曲型であれば，$W^s(p)$ と $W^u(p)$ は点 p においてそれぞれ行列 J の安定固有空間と不安定固有空間に接する．特に $W^u(p)$ が 1 次元の場合には p の近傍は $W^s(p)$ によって 2 つに分離され，解が $W^s(p)$ のどちら側にあるかによって解は全く異なる挙動を示す（図 3 参照）．

前節の (iv) の場合，平衡点 C での線形化方程式は，

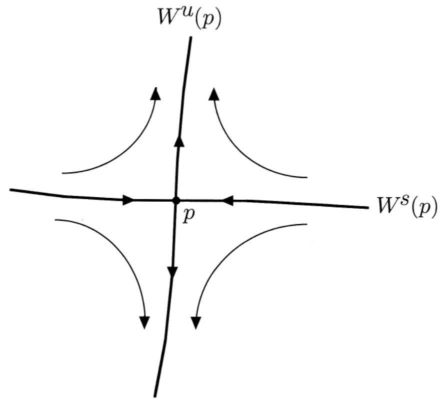


図 3　安定多様体と不安定多様体．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix}=J\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix}.$$

ただし

$$J=\begin{pmatrix}a_1-2b_1u_C-c_1v_C & -c_1v_C\\ -c_2v_C & a_2-c_2u_C-2b_2v_C\end{pmatrix}$$

となる．計算はやや面倒だが，行列 J は正と負の固有値を 1 個ずつ持つことが示される．したがって平衡点 C は鞍点となり安定多様体と不安定多様体はともに 1 次元で，安定多様体がセパラトリクスとなる．

5. 偏微分方程式の分岐構造

この節では (1) に拡散項を付け加えた次の非線形拡散方程式を考えよう．

$$\begin{aligned}&u_t=u_{xx}+u(k-u^2), \quad x\in(0,1),\\ &u_x(0,t)=u_x(1,t)=0.\end{aligned} \tag{5}$$

ただし，初期値 $u(x,0)=u_0(x)$ は $[0,1]$ 上の連続関数とする．明らかに常微分方程式 (1) の解は (5) を満たす．特に $u=0$ は (5) の平衡解であり，$k>0$ のときには $u=\pm\sqrt{k}$ も平衡解となる．空間的に一様な解に限れば (5) の解の分岐構造は図 1 のようになるが，一般の解の $t\to\infty$ としたときの振舞いは以下のように分類される．まず $k\le 0$

であれば，任意の初期値 $u_0(x)$ に対し，(5) の解は平衡解 $u=0$ に一様収束する．$k>0$ のときには (5) の解は以下を満たす．

(i) 初期値が区間 $[0,1]$ 上で $u_0(x)<0$ を満たせば，平衡解 $u=-\sqrt{k}$ に一様収束する．

(ii) 初期値が区間 $[0,1]$ 上で $u_0(x)>0$ を満たせば，平衡解 $u=+\sqrt{k}$ に一様収束する．

したがって，分岐図において縦軸が関数空間を 1 次元的に表したものであると見なせば，図 1 は方程式 (5) の解の構造を正しく表していると言ってよいであろう．ただし，定符号の解に対しては平衡解 $u=0$ は収束先を分け隔てるセパレータとなっているが，符号変化する解の挙動はより複雑であり注意を要する．平衡解 $u=0$ の近傍の解の挙動は，(5) の右辺の線形化作用素によって決定される．ハートマン・グロブマンの定理と同様に，平衡点 $u=0$ の近傍の解の挙動は線形化方程式

$$U_t=U_{xx}+kU,\quad x\in(0,1),$$
$$U_x(0,t)=U_x(1,t)=0$$

によって近似できる．ヤコビ行列の固有値に対応するのは，境界値問題

$$\lambda\varphi=\varphi_{xx}+k\varphi,\quad x\in(0,1),$$
$$\varphi_x(0)=\varphi_x(1)=0$$

の固有値である．この方程式が非自明な解を持つような λ の値を固有値，この非自明解を固有関数という．これはストゥルム・リウビル型の**固有値問題**であり，その固有値と対応する固有関数は簡単に

$$\lambda_n=k-n^2\pi^2,\quad \varphi_n(x)=\cos(n\pi x),\quad n=0,1,\cdots$$

と計算できる．これより，k が大きくなるにつれて正の固有値の数が増えていくことがわかる．特に $k=i^2\pi^2$ を境に正の固有値の数が増えて不安定多様体の次元が上がり，平衡解 $u=0$ 近傍の解の構造がより複雑になる．また，$k=n^2\pi^2$ から空間的に非一様な平衡解が分岐することが知られている[1]．

6. 拡散誘導絶滅

拡散項を加えた方程式の解の構造は対応する常微分方程式よりも複雑であり，素朴な直感に頼ると間違いを起こすことがある．ここでは，拡散項を加えることにより，ダイナミクスが劇的に変化する例を挙げよう．

競争系において，各生物個体が領域 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 内をランダムに移動するとすれば，空間的な拡散効果を考慮した競争拡散系

$$\begin{cases} u_t=\Delta u+(a_1-b_1u-c_1v)u, & x\in\Omega \\ v_t=\Delta v+(a_2-c_2u-b_2v)v, & x\in\Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}u=\dfrac{\partial}{\partial\nu}u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}\tag{6}$$

を考えることになる．ただし，Δ は空間変数 x についてのラプラス作用素であり，境界条件は反射壁である．これに初期条件

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x)\geq 0, \\ v(x,0)=v_0(x)\geq 0 \end{cases}\quad x\in\Omega$$

を課せば $t>0$ について解が一意的に定まる．実は (i), (ii), (iii) の場合には，(2) の大域的に安定な平衡状態は (6) の解としても大域的に安定となることがわかっている[2]．すなわち，最終的な状態は初期状態と関係なく空間的に一様な平衡状態へと近づき，拡散による本質的な違いは生じない．

では (iv) の場合に定義したセパラトリクスは (6) においてどのような意味を持つのだろうか．初期状態が

$$v_0(x)<h(u_0(x))\tag{7}$$

を満たせば，点 x において u は v よりも有利な状態にあると言ってよかろう．もし領域 Ω 上のすべての点において不等式 (7) を満たすとき，解は平衡解 $(u_{\mathrm{A}},0)$ に収束すると言えるだろうか．実は $a_1\geq a_2$ のときは確かに正しいが，$a_1<a_2$ のときには必ずしも正しくなく，精密に述べると以下が成り立つ[2]．

(a) $a_1\geq a_2$ と仮定する．このとき，もし初期値がすべての $x\in\Omega$ に対して (7) を満たせば，

(6) の解は Ω 上で一様に $(u_\mathrm{A}, 0)$ に収束する．

(b) $a_1 < a_2$ と仮定する．このとき，すべての $x \in \Omega$ に対して (7) を満たすにも関わらず，(6) の解が Ω 上で一様に $(0, v_\mathrm{B})$ に収束するような初期値が存在する．

(b) は，たとえ生物種 u が領域内のすべての点において優勢であったとしても，絶滅する可能性があることを表している．この現象は拡散によって不利な状況が引き起こされたことから，**拡散誘導絶滅**と呼ばれている．生物学的にはランダムな移動は必ずしも最適な生き残り戦略とは言えないことになる．

相平面上に以上のことをまとめたのが図4と図5である．影のついた領域は解を相平面上に投影したもので，集合

$$\{(u(x,t), v(x,t)):\ x \in \Omega\}$$

を表している．(a) と (b) の違いはセパラトリクスの凸性からきている．(a) の場合，セパラトリクスは上に凸な曲線（$h'' \leq 0$）となり，セパラトリクスの下側は正不変な領域となる[7]．すなわち，解はすべての $t > 0$ と $x \in \Omega$ に対して $v(x,t)) < h(u(x,t))$ を満たし，さらには $(u_\mathrm{A}, 0)$ に一様に収束する．逆に $a_1 < a_2$ のときには，セパラトリクスは下に凸な曲線 ($h'' > 0$) となり，拡散による平均化作用によって解がセパラトリクスの上側に入ってしまい，その結果，平衡点 $(0, v_\mathrm{B})$ に収束する．

数学的には，「競争拡散系のダイナミクスは対応する常微分方程式系より複雑である」というのは当り前のことかもしれないが，相面図による偏微分方程式の解の挙動の解析には注意が必要だということであろう．競争拡散系の場合，初期値が平衡点 C の安定多様体のどちら側にあるかを判定するのは実はかなり難しい問題であり，素朴な直感に反する解析結果が得られることもある[5]．

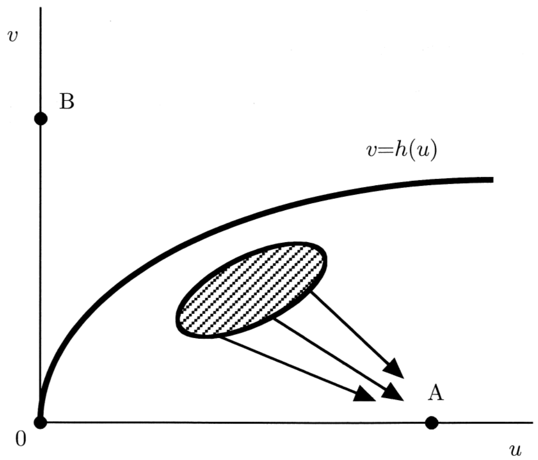


図4　引き込み領域.

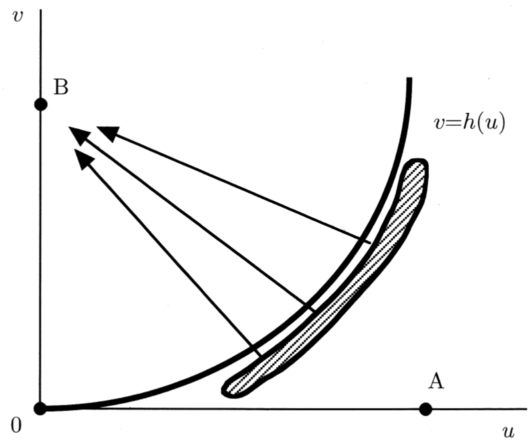


図5　拡散誘導絶滅.

参考文献

1) N. Chafee and E.F. Infante, A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type, *Applicable Anal.* **4** (1974/75), 17–37.

2) M. Iida, T. Muramatsu, H. Ninomiya and E. Yanagida, Diffusion-induced extinction of a superior species in a competition system, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **15** (1998), 233–252.

3) 国府寛司『力学系の基礎』，朝倉書店，2000 年.

4) 森田善久『生物モデルのカオス』，朝倉書店，2000 年.

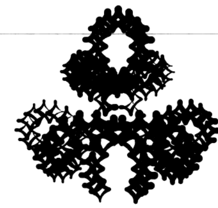
5) H. Ninomiya, Separatrices of competition-diffusion equations, *J. Math. Kyoto Univ.* **35** (1995), 539–567.

6) H. Poincaré (福原満州雄，浦太郎訳)『ポアンカレ常微分方程式—天体力学の新しい方法—』，共立出版，1970 年.

7) H. Weinberger, Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems, *Rend. Mat.* **8** (1975), 295–310.

（やなぎだ・えいじ，東北大学大学院理学研究科）

確率分布の関係を視覚化する



村田　昇

1. はじめに

確率を視覚化すると言えば，確率分布の形をヒストグラムとして描いたり，高次元のデータの特徴が良くわかるようにデータどうしの関係を表す低次元の図を描くといったことをイメージする人が多いだろう．我々の身のまわりにある様々なデータを解析するためにこうした手法は非常に重要である．最近ではネットワーク環境の発達にともなって，これまでには考えられないほどの膨大なデータを容易に収集することが可能となった．また計算機の高速化によって数値的に様々な量を計算することができるようになり，解析的に扱うことができずにこれまでは諦めていた複雑な情報を取り扱うことができるようになってきた．このため分布の推定や次元縮約（削減）の方法はますます重要となり，機械学習や統計学といった分野で現在でも盛んに研究されている．しかしながら本稿で取り上げるのはこのような一つの確率分布を視覚化する問題ではない．

データを記述するのに最適な**確率モデル**を多数の候補の中から選び出すアルゴリズムを考える際には，個々の確率分布の特性を知ることだけが重要なのではなく，分布どうしの関係を考える必要がある．良い確率モデルを選び出すためには，分布どうしに適切な距離を定義してデータと確率モデルの関係を定量的に評価する必要がある．確率分布の集合の中に一種の距離を定義して，分布どうしの幾何学的な関係を考える研究分野は**情報幾何**と呼ばれている[3~5]．これは比較的最近になり発展してきた分野であり，アルゴリズムの性質や挙動を調べるための重要な考え方ともなっている．本稿ではこうした分布どうしの関係を視る方法を取り上げる．以下では簡単な分布と問題を用いて基本的な情報幾何の考え方を紹介していくことにしよう．

2. 分布の中点

まず手始めに3つの分布の関係について考えよう．ここでは確率・統計の分野で最も良く現れる1次元の**正規分布**を対象とする．正規分布は**平均** μ，**標準偏差** σ の2つのパラメタで特徴付けられ，その密度関数は

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

で表される分布である．この分布から区間 (a, b) に含まれるデータが発生する確率は，図1の斜線で示したように密度関数の積分

$$P(a < x < b) = \int_a^b p(x)dx$$

で与えられる．

さて，平均 μ_A 標準偏差 σ_A の分布 A と，平均 μ_B 標準偏差 σ_B の分布 B があったとき，分布 A と B のちょうど真ん中の点にあたる正規分布 C がどのようなものになるか考えてみよう．平均と標準偏差を決めることによって正規分布は一意に定められるので，直感的にはこれを2等分して平均 $\frac{\mu_A+\mu_B}{2}$ 標準偏差

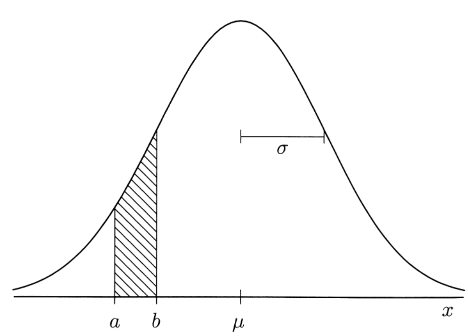


図1　正規分布の密度関数と確率の関係．

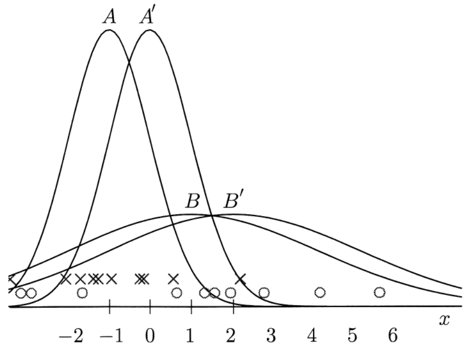


図 2 データからの分布の推測．平均の差が同じでも，標準偏差の違いによってその難しさは異なる．

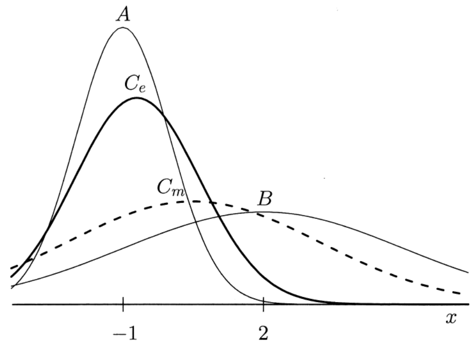


図 3 指数表現（実線）と混合表現（破線）における 2 つの分布の中点．

$\frac{\sigma_A+\sigma_B}{2}$ とすれば良いように思われる．ところがこの考え方は実のところあまりよろしくない．例えば分布 A は $(\mu_A,\sigma_A)=(-1,1)$，分布 B は $(\mu_B,\sigma_B)=(2,3)$ としておこう．ここで A の平均が 1 だけ大きくなった分布 A' $(\mu_{A'},\sigma_{A'})=(0,1)$ と，B の平均が 1 だけ小さくなった分布 B' $(\mu_{B'},\sigma_{B'})=(1,3)$ を考えてみよう．分布 A と A'，および B と B' はそれぞれ標準偏差が同じで平均が 1 だけずれているので，上のような中点のとり方，すなわち (μ,σ) をユークリッド空間の座標のように考えると，A-A' と B-B' は同じだけ離れていることになる．ところが，データが A と A' のどちらの分布から出たのかを見分けるのと，B と B' のどちらから出たのかを見分けるのではその難しさが全く異なる．図 2 のように，A から発生した 10 個のデータ（×）を観測すれば，そのほとんどが -2 から 0 の間に入るので A' ではなく A から出たと推測できるが，B から出た 10 個のデータ（○）を観測したとしても広い区間に散らばって B からなのか B' からなのか判然としない．したがって，単純に平均と標準偏差の差が同じだからといって 2 つの分布が同じだけ離れていると考えることには少々抵抗があることがわかるだろう．

正規分布の密度関数を表すパラメタは，平均と標準偏差を対にする以外にもたくさんの候補が考えられる．したがって中点のとり方も様々な可能性がある．例えば平均と**分散**をパラメタとして中点を考えると，分布 C は平均 $\frac{\mu_A+\mu_B}{2}$ 分散 $\frac{\sigma_A^2+\sigma_B^2}{2}$，すなわち標準偏差 $\sqrt{\frac{\sigma_A^2+\sigma_B^2}{2}}$ を持つ正規分布となるが，これは平均と標準偏差で中点を考えたものとは異なる分布となる．

以下では，少し異なる視点から合理的なパラメタの表現を考えてみることにしよう．まず正規分布の密度関数の形に着目して

$$\begin{aligned}p(x) &= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2+\frac{\mu}{\sigma^2}x+c(\mu,\sigma)\right)\\ &= \exp\left(\theta_1 x+\theta_2 x^2+c(\theta_1,\theta_2)\right)\end{aligned}$$

のように書き直してみる．ここでは

$$(\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{\mu}{\sigma^2},-\frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

としている．また x によらない関数は c としてまとめているが，これは x に関する積分を 1 とするための正規化項である．この θ_1 と θ_2 を新たなパラメタと考えてその中点を考えてみよう．

$$(\theta_{C1},\theta_{C2})=\frac{(\theta_{A1},\theta_{A2})+(\theta_{B1},\theta_{B2})}{2}$$

であるから，簡単な計算により

$$\mu_C=\frac{\mu_A\sigma_B^2+\mu_B\sigma_A^2}{\sigma_A^2+\sigma_B^2},\quad \sigma_C^2=\frac{2\sigma_A^2\sigma_B^2}{\sigma_A^2+\sigma_B^2}$$

と表現されることがわかる．これで定義される中点 C_e の分布を図 3 に実線で示す．パラメタ θ でのユークリッド距離を考えると，A と A' の距離は 1，B と B' の距離は $\frac{1}{9}$ となり，A-A' 間に比べて B-B' 間は非常に短くなり「距離が近い = 分布を見分け難い」という自然な性質を持ったパラメタの表現になっていることがわかる．この中点のとり方は指数の肩に載っている関数形を用いるという意味で**指数表現**による中点と呼ぶことにしよう．

次に分布から生成されるデータの性質を反映するパラメタの表現を考えてみよう．例えば A から n 個のデータが生成されたとする．これを $x_1,x_2,\ldots,x_n$ と書くことにすると，**標本平均**は

$$\bar{\mu}_A=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

と表され，n が十分大きければ $\bar{\mu}_A\simeq\mu_A$ となるであ

ろう．また，**標本分散**は

$$\bar{\sigma}_a^2 = \frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) - \bar{\mu}_A^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{\mu}_A^2$$

と書くことができ，これも $\bar{\sigma}_A^2 \simeq \sigma_A^2$ となるであろう．B からも同様に n 個のデータ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ を得たとしよう．さて，分布 A と B の真中の正規分布 C から $2n$ 個のデータを観測したとき，この $2n$ 個のデータは A と B からそれぞれ n 個ずつ得られたデータを混ぜ合わせた $2n$ 個のデータと同じ性質を持つと仮定してみよう．もちろん混ぜ合わせたデータは μ_A と μ_B 付近にある程度かたまっているため，ヒストグラムを描くとその形は正規分布には程遠いかもしれないが，ここでは正規分布を特徴付ける平均と分散が，分布 C からのデータと混ぜ合わせたデータでは同じだと考えるのである．混ぜ合わせたデータの標本平均と標本分散は

$$\bar{\mu}_C = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j\right),$$

$$\bar{\sigma}_C^2 = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) - \bar{\mu}_C^2$$

と計算されるので，

$$\mu_C = \frac{\mu_A + \mu_B}{2}, \quad \sigma_C^2 = \frac{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}{2} + \frac{(\mu_A - \mu_B)^2}{4}$$

とすれば良いことがわかる．これはパラメタを

$$(\xi_1, \xi_2) = \left(\mu, \sigma^2 + \mu^2\right)$$

として ξ_1 と ξ_2 の中点を計算してから μ, σ に戻していると考えても良い．この中点のとり方は，データを混ぜ合わせるというある意味自然な操作から導かれたものなので，**混合表現**による中点と呼ぶことにしよう．実際の中点の分布 C_m を図 3 に破線で示す．ただし，指数表現とは異なり，パラメタ ξ での A-A' と B-B' のユークリッド距離を計算してみるとわかるが，分布を見分けるという観点からは必ずしも自然なパラメタのとり方にはなっていないことに注意しておく．

ところで上の 2 つの計算方法では中点以外にも任意の比の内分点が求められる．指数表現，混合表現のそれぞれによる内分点を結んだ線を図 4 に示す．

さて，2 つの分布の中点や分布間を結ぶ線はこれまで考えてきたようにいろいろな可能性がある．ではいったいどの中点のとり方，あるいはどの線の引き方が，どういう意味で良いのであろうか？ この疑問に部分的な解を与えてくれるのが次の KL 情報量である．

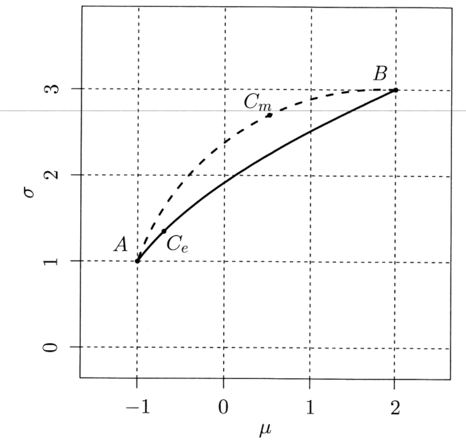


図 4 指数表現（実線）と混合表現（破線）における 2 つの分布を結ぶ線．(μ, σ) で表された空間では曲がっているが，それぞれの表現ではまっすぐな線と考えることができる．

3. KL 情報量

ここからはより具体的な距離を考えてみることにしよう．データを最も適切に表現する確率モデルを求める場合，データを生成した分布と確率モデルが表す分布の間の距離を定義し，この距離が最も短くなる確率モデルを採用するという戦略をとることができる．確率密度を持つ分布の場合には，密度関数どうしに何らかの距離が定義できれば，それを分布の距離と考えることができる．例えば分布 P, Q の密度関数が p, q で与えられたとき，関数の距離の代表格である L^2-距離

$$D_{L^2}(P, Q) = \int (p(x) - q(x))^2 dx$$

を用いて比較すれば良い．ところが統計の分野ではこの距離はあまり用いられない．いろいろな理由があるが，大雑把に言えば密度が 1 点に集中していく分布を考えたとき，積分値が発散してしまうためいろいろ不都合が起こるからである．一方，確率密度は値が正で積分値が 1 となることから

$$\int p(x)dx = \int \left(\sqrt{p(x)}\right)^2 dx = 1$$

と書き直すことができるので，密度の平方根の L^2-距離

$$D_H(P, Q) = \int \left(\sqrt{p(x)} - \sqrt{q(x)}\right)^2 dx$$

を考えることができる．この距離は積分値が有界となるため，前述した不都合は起こらない．実際この定数倍は Hellinger 距離と呼ばれ，統計でもしばしば用いられている．

ところで一般にデータを生成した分布は陽にわからないので，上で例に挙げた距離を使うためにはデータから分布の密度 p を構成する必要がある．しかしこれはかなり面倒である．変数 x が 1 次元，あるいは 2 次元程度であればヒストグラムを作り密度の代理とすることもできるが，高次元になるとヒストグラムのビンの数が膨大になりとんでもないことになる．そこで密度を求めずに，集めたデータから簡便に距離が計算できることが望ましい．例えばデータから直接計算できる標本平均のようなものだけで距離が記述できれば良いが，そんな都合の良い距離があるのであろうか？そういう都合の良いものが実はいくつかあるのだが，その中でも重要なのが **KL 情報量** (Kullback-Leibler 情報量，または Kullback-Leibler ダイバージェンス) と呼ばれる距離である．

まず，KL 情報量の定義を与えておこう．2 つの分布 P,Q の密度関数 p,q が与えられたとき，KL 情報量は

$$\begin{aligned}KL(P,Q) &= \int p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}dx\\ &= \int p(x)\log p(x)dx - \int p(x)\log q(x)dx\end{aligned}$$

で定義される．また，分布 P,Q が K 個の離散点の上の分布で

$$P(X=k)=p_k,\quad Q(X=k)=q_k,\ (k=1,\ldots,K)$$

と表される場合には，KL 情報量は

$$KL(P,Q)=\sum_{k=1}^{K}p_k\log\frac{p_k}{q_k}$$

と定義される．以下では密度関数のある場合を用いて KL 情報量の性質を説明していくが，離散の場合も同様な性質が成り立つ．

まず $\log x$ の $x=1$ での接線を考えることにより

$$\log x \le x-1$$

となるので，KL 情報量の非負性が

$$\begin{aligned}KL(P,Q) &= -\int p(x)\log\frac{q(x)}{p(x)}dx\\ &\ge \int p(x)\left(1-\frac{q(x)}{p(x)}\right)dx = 0\end{aligned}$$

と容易に確かめられる．また等号成立の条件を考えると $P=Q$ のときに限り 0 となることがわかる．しかしながら P と Q を交換すると

$$KL(P,Q)\neq KL(Q,P)$$

となり，距離の条件の一つである対称性はないことが

Scilab プログラミング入門

上坂吉則著／A5判・近刊

Scilabでプログラミングをするための自習書兼リファレンスブック。簡単な例題にもとづいて実行するうちにプログラミングのコツが自ずと会得できるようになっている。好評既刊書『MATLABプログラミング入門』の姉妹編。

数と計算の歩み

五十嵐善英ほか著／A5判・定価1,995円

有史以前から今日のインターネット上に構築された社会に至るまで、人類は数と計算に関していかに工夫を重ね、かつ役立てて来たかを平易に解説。一般読書人の教養書または大学総合科目の教科書として広くお勧めする。

経済・統計分析入門2

実例とEXCELによる統計学トレーニング

片山直也著／A5判・定価2,520円

統計学の基礎的な理論と実際の使用法を分かりやすく解説した入門書。大学初年級程度の数学を用いて理論面を説明するとともに、EXCELを用いたデータ処理の基本的な方法を紹介。通年および半期の講義用テキストとして使用可能。

Excelで学ぶ実用統計

原田康平著／B5判・定価2,940円［CD-ROM付］

Excelの基本を一通り学んだ後、さらにデータ分析に興味ある人びとを対象に統計処理を解説した入門書。身近なデータや具体的事例を豊富に取り入れ、Excelの便利さを再確認しつつ、統計処理が容易なことを実感してゆく。

★価格は税込

発行＝牧野書店 114-0024東京都北区西ケ原3-60-18 電話(03)3949-2344 http://www.makinoshoten.co.jp/

発売＝星雲社 112-0012東京都文京区大塚3-21-10 電話(03)3947-1021 FAX(03)3947-1617

わかる．このため KL 情報量は正確には距離でなく，**擬距離**と呼ばれることが多い．

この形のままでは $p(x)$ の具体的な形が必要なように見えるが，与えられたデータを用いて最適な q を求めるときには p は固定されていると考えて良いので，$KL(P,Q)$ の最小化は分布 P での $\log q(x)$ の平均

$$\int p(x)\log q(x)dx = E_P\left[\log q(x)\right]$$

を q に関して最大化することに帰着される．したがって与えられたデータ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ を用いて計算する場合には $\log q(x)$ の標本平均

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log q(x_i)$$

を最大化する密度 q を求めればよい．

ここでなぜ対数関数が出てくるかについては，いくつかの説明が可能である．データ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ がそれぞれ独立に出現しているとすれば，確率モデル Q においてこのデータの同時密度は一つの観測データの密度 $q(x)$ を用いて

$$q(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} q(x_i)$$

と積で表されるので，データはこの同時密度を最大とする分布 Q から生成されたと考えることは自然であろう．このまま最大化しても良いが，単調増加な対数関数 log で積を和に変換してから最大化しても良い．このデータの同時密度の最大化は**最尤推定**と呼ばれる考え方で，上の $\log q(x)$ の標本平均の最大化と等価になる．あるいは情報理論の中で重要な役割を果たしている**情報量** $\log\frac{1}{p(x)}$ と対応づけることもできる．情報量とは確率密度 p から生成されたデータ x をどこか別の場所に伝えるために必要な最適な符号の長さ，言い換えると通信に必要なコストを表している．データが密度 q を持つ分布 Q から生成されていると考えたときの平均の通信コストは，データの情報量の標本平均

$$（平均通信コスト）= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{q(x_i)}$$

で表される．したがってこれを最も小さくする密度 q を持つ分布がデータを適切に表現し，通信コストを下げる分布であると考えることができる[5)]．

次に KL 情報量において 3 つの分布 P,Q,R の関係を考えてみよう．定義にのっとって計算すると

$$\begin{aligned}&KL(P,R)-KL(P,Q)-KL(Q,R)\\&=\int (p(x)-q(x))\,(\log q(x)-\log r(x))\,dx\end{aligned}$$

となるが，右辺が 0 となる，すなわち関数 $p(x)-q(x)$ と関数 $\log q(x)-\log r(x)$ が直交するとき

$$KL(P,R)=KL(P,Q)+KL(Q,R)$$

という簡単な関係式が成立する．この関係は KL 情報量を 2 つの分布の距離の 2 乗に見立てて**ピタゴラスの定理**と呼ばれている．

さて，確率分布の空間におけるこの定理の意味を考えてみよう．まず，図 5 のように，分布 A と B を指数表現で結んだ線 AB 上の分布を考える．この線上の点 Q,R は指数表現での A,B の内分点なので，

$$\begin{aligned}\theta_Q &= \alpha\theta_A+(1-\alpha)\theta_B,\\ \theta_R &= \beta\theta_A+(1-\beta)\theta_B\end{aligned}$$

と表される．前節の正規分布の例で考えれば

$$\begin{aligned}&\log q(x)-\log r(x)\\&=(\alpha-\beta)\left\{(\theta_{A1}-\theta_{B1})x+(\theta_{A2}-\theta_{B2})x^2\right\}\\&\quad+c(\theta_A,\theta_B,\alpha,\beta)\end{aligned}$$

となり，対数密度の差は A と B の密度関数の指数の肩の差の定数倍になる．ただし関数 c は x によらない部分である．ここで，ある分布 P に対して分布 Q は

$$\begin{aligned}&(\theta_{A1}-\theta_{B1})E_P[x]+(\theta_{A2}-\theta_{B2})E_P[x^2]\\&=(\theta_{A1}-\theta_{B1})E_Q[x]+(\theta_{A2}-\theta_{B2})E_Q[x^2]\end{aligned}$$

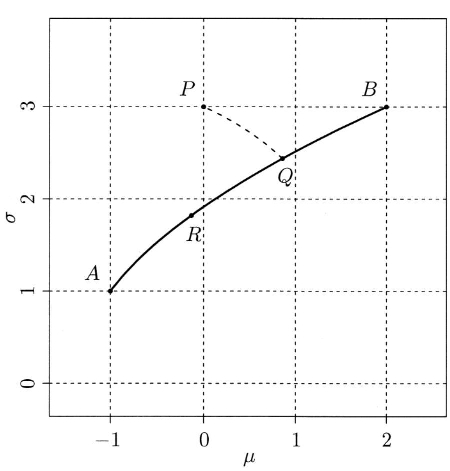


図 5 KL 情報量におけるピタゴラスの定理．P からみた AB 上の最短点を Q とすると，混合表現での PQ と指数表現での QR は直交している．

を満たす AB 上の分布としよう．関数 c は x によらないので，いつでも $E_P[c]=E_Q[c]$ が成り立つことに注意すると，AB 上の任意の分布 R に対して

$$E_P[\log q(x)-\log r(x)]=E_Q[\log q(x)-\log r(x)],$$

すなわち

$$\int (p(x)-q(x))(\log q(x)-\log r(x))\,dx=0$$

となることが確かめられる．したがって分布 P,Q,R の間にはピタゴラスの定理が成立するので，KL 情報量の正値性 $KL(Q,R)\geq 0$ から必ず

$$KL(P,R)\geq KL(P,Q)$$

となり，分布 Q は KL 情報量の意味で分布 P に最も近い AB 上の分布であることがわかる．これはユークリッド空間においてある点のある直線（線形部分空間でも良い）への直交射影が最短点と一致する性質と同等で，指数表現で AB を結ぶ線（$\log q-\log r$ に相当）に対して混合表現で結ばれた線（$p-q$ に相当）が直交するように射影した点が最短点となることを意味している．したがって指数表現と混合表現のどちらかが大事ということはなく，確率分布の空間では 2 つが関連し合って重要な働きをしているという非常に特徴的で興味深い性質があることがわかる．

4. データと確率モデルの視覚化

こうした幾何学的な考え方はいろいろな場面に応用でき，アルゴリズムの解釈や，推定の意味の吟味や評価に威力を発揮する．ここでは一例として表 1 のようなアンケートデータから確率モデルを構成する方法を考えてみることにする．表 1 は様々な人（Anne, Bob など）が様々な映画（“Toy Story”，“Star Wars” など）を 1 点（悪い）から 5 点（良い）で評価したものである．どの映画が最も良いかを知りたければ，得点の平均を計算して最高得点の映画を調べるというのが最も簡単な方法であろう．ところがこの単純な評価法にはいくつか問題がある．まず，個々の映画はすべての人に観られているわけではなく，膨大な数の映画をすべて観ている人もいない．また，得点の辛い人もいれば甘い人もいて，同じ 3 点でも人によってその意味合いは異なり絶対的な評価値とは言い難い．このため，非常に良い映画がたまたま評価の辛い人だけに観られていて平均点が低くなったり，評価の甘い少数の人に観られたそこそこの映画の平均点が高くなってしまう

表 1 アンケートデータの例．

	“Toy Story”	“Star Wars”	“Brave heart”	“The Saint”	…
Anne	4	5		3	
Bob		5	4	2	
Cathy	5			3	
David	3	4	3	3	
…					

といったことも起こり得るので，単に平均点が最高というだけで最も良い映画と判断するのは危険だと考えられる．

この例のように，多数の人が一部の対象を個別に評価したデータは我々のまわりのいたるところにある．最近では本や車といった商品あるいはレストランなどの評価を投票するウェブサイトが数多くあり，そうしたデータの集計を見た人も多いのではないだろうか．このようなデータから人々が対象をどのように評価しているかを説明するモデルの構築法はいろいろ提案されているが，ここでは最も簡単なモデルの一つである **Bradley-Terry モデル**（BT モデル）を考えてみることにしよう[2]．BT モデルは K 個の対象に

$$\sum_{i=1}^{K}\theta_i=1,\quad \theta_i>0$$

を満たすパラメタを割り当て，ある人が対象 i に対象 j より高い得点を与える確率を

$$P(i\text{ の得点}>j\text{ の得点})=\frac{\theta_i}{\theta_i+\theta_j}$$

で与えるモデルである．直感的には n 人が対象 i と対象 j を比べたとき，$\frac{\theta_i}{\theta_i+\theta_j}n$ 人が対象 i を高く評価し，残りが対象 j を高く評価すると考えるのである．ある人が 2 つの対象に与える得点の大小関係しか見ていないので，評価を絶対的な値とは捉えていないことになり，点数の辛い甘いに左右されないモデルとなっている．ただし最も簡単といったとおり，このモデルでは 2 つの対象の関係しか考えていない．例えば A より B が好きな人は C より D を好む傾向があるといった 3 つ以上の対象が相互に依存するような関係はモデルに入っていないので，BT モデルはあくまで近似モデルにすぎない．ところで，すべての対象について考えたとき，パラメタ $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_K$ はすべて正で，その合計は 1 なので，このモデルは**多項分布**と同一視することができる．また θ_i の値が最も大きな対象が多くの人に高く評価される良いものと考えることができる．

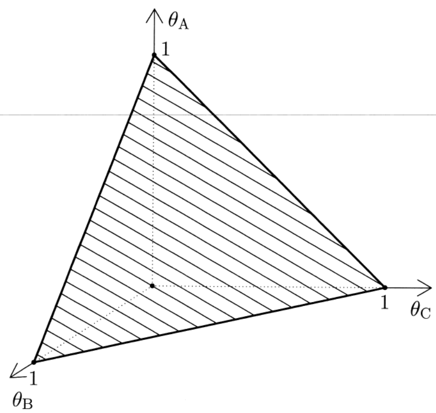


図 6 BT モデルのパラメタの存在領域 S.

ではデータが与えられたとき，パラメタを求めるにはどのようにすれば良いであろうか？ 例えば 100 人が A, B, C の 3 つの対象を評価したデータがあるとしよう．A, B, C に与えられるパラメタは

$$\theta_A + \theta_B + \theta_C = 1,\ \theta_A > 0, \theta_B > 0, \theta_C > 0$$

を満たさなくてはいけないので，図 6 に示す 3 次元空間の中の正三角形の領域 S に含まれる．

さて 100 人の中で 60 人が A と B を比べ，45 人が A に，15 人が B に高得点を与えたとしよう．A を 5 点で B を 4 点とした人も，A を 3 点で B を 1 点とした人も，どちらも A をより高く評価したとして同様に扱っていることに注意しよう．また A も B も 4 点とした場合は，どちらが高い評価かわからないので A と B の比較からは除くことにする．このとき

$$P(\text{A の得点} > \text{B の得点}) = \frac{\theta_A}{\theta_A + \theta_B} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

となり，データを説明するパラメタは図 7 の点線上

$$L_{AB} = \{(\theta_A, \theta_B, \theta_C) \in S | \theta_A : \theta_B = 3 : 1\}$$

にあることがわかる．同様に例えば

$$P(\text{B の得点} > \text{C の得点}) = \frac{\theta_B}{\theta_B + \theta_C} = \frac{1}{5}$$

$$P(\text{C の得点} > \text{A の得点}) = \frac{\theta_C}{\theta_C + \theta_A} = \frac{1}{3}$$

とすれば，三角形の中にさらに 2 本の線 L_{BC}, L_{CA} が引かれる．この 3 本の線が交われば，その交点がパラメタ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_A, \theta_B, \theta_C)$ の推定値となるが，実はほとんどの場合交わることはなく，図 8 のようになる．これは BT モデルがあくまで近似的なモデルであり，2 つの対象間の関係だけでは記述できないデータのゆらぎが存在するからと考えておけばよい．

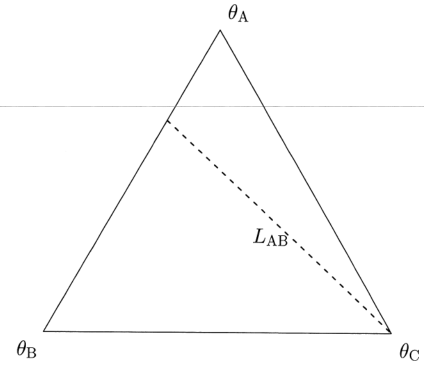


図 7 対象 A, B に対する評価から与えられるパラメタの条件．

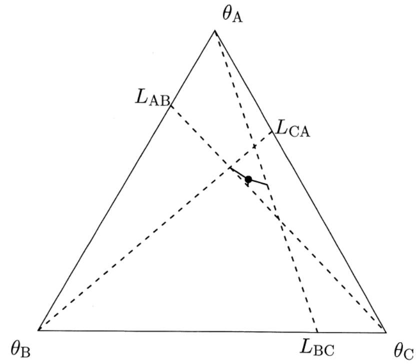


図 8 データから与えられる条件と BT モデルの最適パラメタの関係．図は $N_{AB} = N_{BC} = N_{CA}$ として計算したものである．

では，妥当なパラメタの推定値はどのようにして求めれば良いだろうか？ 前述したように領域 S は多項分布の空間と同一視されるので，この空間での 2 点間の距離は KL 情報量を用いるのが良いであろう．そこでパラメタの推定問題を，データから得られた L_{AB}, L_{BC}, L_{CA} の 3 つの線から最も近い点を求める問題として定式化すれば良い．このとき，点 $\boldsymbol{\theta}$ と線 L_{ij} の距離は線上の点の中で最短距離を与える点を用いて

$$KL(L_{ij}, \boldsymbol{\theta}) = \min_{\boldsymbol{\theta}' \in L_{ij}} KL(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta})$$

$$= \min_{\boldsymbol{\theta}' \in L_{ij}} \sum_{k \in A,B,C} \theta'_k \log \frac{\theta'_k}{\theta_k}$$

としてやれば良いであろう．なお L_{ij} は混合表現で結んだ線になっていることに注意すると，KL 情報量の使い方は逆向きであるが前節と同様の議論で $\boldsymbol{\theta}$ から混合表現で結んだ L_{ij} に指数表現を用いて直交射影を行うことで最短点が 1 点求まることがわかる．また，それぞれの線を決めるのに使っているデータの数は異な

るので，データ数での重み付けも考えることにする．対象 i と j に点差を付けて評価した人の数を N_{ij} と書くことにすれば，最適なパラメタは

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in S}\Big\{N_{\mathrm{AB}}\min_{\boldsymbol{\theta}'\in L_{\mathrm{AB}}}KL(\boldsymbol{\theta}',\boldsymbol{\theta}) + N_{\mathrm{BC}}\min_{\boldsymbol{\theta}''\in L_{\mathrm{BC}}}KL(\boldsymbol{\theta}'',\boldsymbol{\theta}) + N_{\mathrm{CA}}\min_{\boldsymbol{\theta}'''\in L_{\mathrm{CA}}}KL(\boldsymbol{\theta}''',\boldsymbol{\theta})\Big\}$$

を満たす点 $\boldsymbol{\theta}$ と考えることができる．この式は最小化を 2 重に行っているが，適当な初期値から出発して各線上の最短点 $\boldsymbol{\theta}'$ 等を求める操作と，これらの点から最短となるパラメタ $\boldsymbol{\theta}$ を求める操作を収束するまで交互に繰り返すことによって最適解が求められる．

5. おわりに

本稿では，確率分布どうしの距離を KL 情報量を用いて測る場合の空間の性質について，情報幾何の基本的な考え方に基づいて駆け足で紹介した[3~5]．実は KL 情報量以外でも確率分布の空間の幾何学を議論することはできる．例えば α-ダイバージェンスや Bregman-ダイバージェンスといった 2 つの分布の間に定義される様々な擬距離について統一的な議論がなされ，特徴付けが行われている[1,4]．情報幾何はいまだ研究途上にあるが，統計学や機械学習の発展に伴なってますますその展開が注目される分野と言えるだろう．

参考文献

1) P.D. Grünwald and A.P. Dawid, Game Theory, Maximum Entropy, Minimum Discrepancy and Robust Bayesian Decision Theory, *The Annals of Statistics*, 32(4):1367–1433, 2004.
2) T. Hastie and R. Tibshirani, Classification by Pairwise Coupling, *The Annals of Statistics*, 26 (2):451–471, 1998.
3) M.K. Murray and J.W. Rice, *Differential Geometry and Statistics*, Chapman & Hall, London, 1993.
4) 甘利俊一，長岡浩司，『情報幾何の方法』，岩波講座 応用数学，岩波書店，1993.
5) 村田昇，『新版 情報理論の基礎—情報と学習の直観的理解のために』，SGC Books M3，サイエンス社，2008.

（むらた・のぼる，早稲田大学理工学術院）

好評発売中 !!

SGC Books

新版 基礎からの力学系
分岐解析からカオス的遍歴へ　小室元政 著　A5 判　本体 2000 円

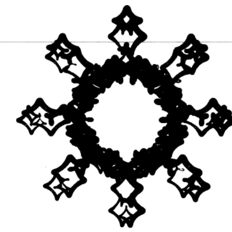
新版 応用のための関数解析
その考え方と技法　吉田善章 著　A5 判　本体 1900 円

新版 情報理論の基礎
情報と学習の直観的理解のために　村田 昇 著　A5 判　本体 1750 円

表示価格は税抜きです

[サイエンス社]

位相幾何学の可視化と計算機



阿 原　一 志

1. 計算機を用いた可視化

計算機を用いた可視化（ビジュアライゼーション）とは，これまで見られなかったものを計算機の技術で映像化することです．計算機科学の主要なテーマの一つで，インタラクティビティ（ユーザーの動作にリアルタイムで状況が変化する映像技術），バーチャルリアリティ（VR，ユーザーが仮想現実を体感できる映像技術）などともに活発に研究されています．数学における可視化の中で，本稿では位相幾何学と可視化の関係について解説したいと思います．

2. 位相幾何

位相幾何学（トポロジー）は，数学の中では比較的新しい研究分野です．幾何学とは図形を研究する学問で，ユークリッド以前からの非常に古い歴史を持ちますが，その中から「図形のつながり方」を主たるテーマとして考えようと派生したのが位相幾何学です．

最も簡単な例題を考えてみましょう．○，△，□の3つの図形は「輪っかである」という意味で同じ図形であると考えます．これを「位相同型（同相，homeomorphic）」と言います．ここでは図形の丸まり具合や尖り具合は問題にせず，図形としてのつながり具合だけを考えるのです．図形がゴム紐やゴム膜でできていると考えるとわかりやすいということから「ゴム膜の幾何学」とも呼ばれています．

位相同型を正しく定義をすると次のようになります．2つの図形（正しくは位相を持った集合（位相空間）を対象にしますが，なじみの薄い読者は，ユークリッド空間の部分集合を思い浮かべればとりあえず十分です）X, Y が位相同型であるとは，ある写像 $\varphi : X \to Y$ が存在して，(1) φ は全単射である，(2) φ, φ^{-1} は連続である，の2つの条件をみたすことを言います．(1) の条件は図形 X 内の点と図形 Y 内の点とが完全に1対1に対応していることを意味します．(2) の条件はその対応が連続的な（近くのものは近くのものに対応する）対応であることを意味します．簡単な例としては，「く」と「つ」は図形として位相同型，「せ」と「を」，「は」と「お」は位相同型です．

位相幾何学は新しい問題・新しい定理を数多く輩出してきました．その最も有名なものの一つは**ポアンカレ予想（ペレルマンの定理）**で，3次元閉多様体が単連結であるならば，その多様体は3次元球面と位相同型である，というものです．ここでは「閉多様体」「単連結」の定義はしませんが，定理の最終的な主張は「位相同型」であることからもわかるとおり，位相同型は位相幾何学の最も重要な概念です．

もう一つの有名な位相幾何学の定理は**3次元空間内で2次元球面を裏返すことができる**というスメールの結果です．3次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内に2次元球

面 $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ がありますが，この2次元球面を連続的に動かして，かつ尖らせたり折り曲げたりしないで裏返すことができる，という定理です．

これも正しく述べておきましょう．まず「最初の状態の S^2」とは，例えば埋め込み写像

$$i: S^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (x,y,z)$$

です．「裏返った S^2」にはいろいろあるでしょうが，例えば

$$f: S^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (-x,y,z)$$

を考えましょう．「2次元球面を裏返す」というのは，パラメータ t $(0 \leq t \leq 1)$ に対して，$f_t: S^2 \to \mathbb{R}^3$ が滑らかなはめ込み（smooth immersion，微分可能かつ微分写像が単射）であって（t については連続であることを仮定します），$f_0 = i$, $f_1 = f$ であるようなもののことを言います．t を時間パラメータ（単位：秒）だと思えば，1秒間の間に球面が3次元空間内で連続的変形して裏返ることを意味するわけです．

スメールは代数トポロジーの手法を用いてこれを証明しましたので，実際に裏返す過程を絵に書いて示したわけではありませんでした．そこで，このスメールの定理を可視化しようと数学者たちが挑戦しました．最初はパフが金網を使って途中経過の曲面の模型を作りました．それをもとにマックスがコンピューターを用いてグラフィックス動画を作りました．「球面を裏返す」[1]というタイトルで日本語吹き替え版（1991年）もあり，現在でも手に入るようです．その後，サーストンによる「Outside In」[2]（1995）という改良版のビデオが発表され，ユーチューブでも見ることができます．これらは位相幾何学の計算機による可視化のパイオニア的な作品であると言えるでしょう．

■ 3. 位相幾何の可視化 ■

もともと図形を取り扱う分野である位相幾何学ですから，コンピューターグラフィックスの対象になりやすいと考えられますが，位相幾何学の多くの研究対象は今でもなかなかコンピューターグラフィックスに載せられません．その理由は大きく言って2つあると思います．一つは位相幾何学自体が持つ**ゆるさ・やわらかさ**です．もう一つは**次元**の問題です．

トポロジスト（位相幾何学者）の頭の中では，図形はやわらかい材質でできており，触ると自由に形を変える，というイメージがあります．そして図形を伸ばしたり縮めたりできるだけでなく，必要に応じて好きな部分で切ったり，境界を貼ったりできるようなものを考えます．このイメージをコンピューターのディスプレー上に表現するのは容易ではありません．フランシスの『トポロジーの絵本』[3]は曲面を可視化した優れた本です．この本でフランシスは黒板に手書きで膨大な数の絵を描いてみせました．

筆者は専門を尋ねられたときには**コンピューティング・トポロジー**と答えることにしています．そういったきちんとした学問分野があるわけではなく，トポロジストが頭の中に描いていた図形をコンピューターを用いて画面上に描くための研究であると勝手に解釈して自称しています．いまでは，座標さえわかればMathematicaやMapleなどの汎用ソフトで曲面を描くことができますから，立体的な絵を描くことは簡単になったようですが，「位相同型」であるとか「連続的に動かす」であるとか，そういった，形をはっきりと決めてしまわない考え方は，コンピューターグラフィックスによる可視化を考えるときの障害となります．図形を自由に伸ばしたり縮めたり切ったり貼ったりできるだけではなく，いかにも一般的な位置にあると思える形を提示することも重要なテーマです．位相幾何学にとってのVRとは，このゆるさ・やわらかさを演出することなのだと思います．

もう一つが次元の問題です．位相幾何学で取り扱う対象が高次元であるということは重大な問題です．コンピューターグラフィックスで我々が見ることができるのはせいぜい3次元です．ポアンカレ予想を説明しようとすると，3次元球面を説

明しなければならず，そのためには4次元空間が必要です．ミルナーが証明した有名な**エキゾチック球面**定理は7次元球面が対象です．とても可視化することはできません．トポロジストは「高次元の絵を頭の中で描ける人種」であると言われますが，実際には何らかの形で次元を圧縮して頭の中に描いていると思われますし，（万人から見て納得できるものかはわかりませんが）可視化しようと思えばできることなのかもしれません．しかし，そのようなグラフィックスはほとんど目にしません．

近年よく話題になる言葉に**低次元トポロジー**というものがあります．低次元ならば可視化は簡単にいけそうだとお思いになるかもしれませんが，ここでいう低次元とは「図形の次元が3次元，または4次元」を意味します．それを絵に描こうと思ったら，よほど工夫をしなければいけません．

■ 4. 結び目理論 ■

そのような中で，**結び目理論**（**Knot theory**）はやわらかさの問題も次元の問題もクリアできる幸運な例外であると言えます．結び目とは，3次元空間内の閉じた輪（正しく言えば，S^1 から $\mathbb{R}^3$ への単射な連続写像）のことです．通常は図1のように，上下関係がわかるような紐の絵で書き表しますので，これをコンピューターグラフィックスにすることは容易です．

結び目理論に関連するコンピューター可視化作品が多数発表されています．考え方は2通りあり，一つは紐の絵を3次元的に描く考え方と，もう一つは平面上の道の集まりを平面グラフの一種であると見なして描く考え方です．

今井淳さんの考案した**結び目のエネルギー**は位相幾何的な対象をグラフィックスで描くための基本的なアイディアを与えました．今井さんは，結び目の上の各点に例えば静電気のような互いに反発する力が働くと仮定して，その物理的な安定状態をシミュレーションすることを考えて研究しました．著者も大いに刺激されて1990年にコンピューターグラフィックスのビデオを作製しました．紐の上に等間隔に質点を置き，質点どうしに距離から決まる反発力があると仮定して物理シミュレーションを行ったものです[4]．その他に現在一般公開されているノットのエネルギーの映像はサリバンによる「Knot Energies」[5]です．

インターフェースとしてドローイングソフトのような感覚で結び目を描画入力し，様々な結び目の不変量を計算するソフトが発表されています．日本国内では児玉宏児さんの「**KNOT**」[6]や落合豊行さんの「**K2K**」[7]が有名ですが，これらのソフトでは結び目を平面グラフとしてデータ化し，それを可視化する方法が取られています．

著者個人は第3の結び目ソフトウエア構想を持っています．例えば，図2の2つの結び目は見た目が似ているようですが上下が逆になっていることに注意してください．結び目理論ではよく知られた結果ですが，実はこの2つの結び目は同じ結び目です．つまり，一方からはじめて紐を切ったりすることなく，もう一方へ連続的に変形することができます（このような性質をもろ手型と言います）．そのためには，紐を引っ張ったり縮めたりくぐらせたり解いたりする作業が必要です[8]．大学のゼミナールなどですと，途中経過の絵をいくつ



図1　結び目の例（8の字結び目）．

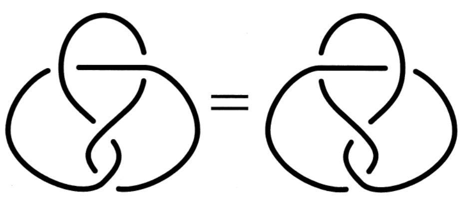


図2　8の字結び目はもろ手型．

か描いて，あとは言葉と動作で説明するのが普通です．こういった作業をインタラクティブに（マウスの操作などで自由に）扱えるソフトウエアがあればよいのにとずいぶん昔から思っていたのです．アイディアとしては結び目の絵を平面上のグラフと見なして処理する方法を使うのですが，いずれ作ってみたいです．

■ 5. 双曲幾何学の可視化 ■

ここで，位相幾何学と非常に縁の深い，双曲幾何学の可視化についてお話をしましょう．ユークリッドの原論に書かれた幾何学をユークリッド幾何学と言いますが，その中に平行線公理があることは有名です．

長年の間，平行線公理を仮定しなくてもユークリッド幾何が成立するのではないかと研究がされてきましたが，19 世紀前半のほぼ同時期に，ロバチェフスキー（ロシア），ボーヤイ（ハンガリー），ガウス（ドイツ）がそれぞれ独立に非ユークリッド幾何の存在を証明しました．つまり，直線 l と直線外の点 X に対して，X を通る l の平行線が 2 本以上存在するような幾何学を構築できるということです．

最初に論文発表したのがロバチェフスキーでしたので，発見当初はロバチェフスキー幾何学と呼ばれましたが，今では広く双曲幾何学と呼ばれています．双曲幾何学ではユークリッド幾何では考えられないような定理が成り立ちます．

例えば三角形の内角の和については次の公式が成り立ちます．三角形 ABC に対して，その面積を $\triangle\mathrm{ABC}$ で表すことにすると

$$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=\pi-\triangle\mathrm{ABC}$$

です．三角形の内角の和はいつでも 2 直角より小さいこともわかります．また，平行線角の定理と呼ばれる定理によりますと，図 3 において，$0\leq\theta\leq\pi/2$ とすると，2 直線 l, l' が交わらない必要十分条件は

$$\log(\tan(\theta/2))\leq\overline{\mathrm{AB}}$$

であることが示されます．ユークリッド幾何学で

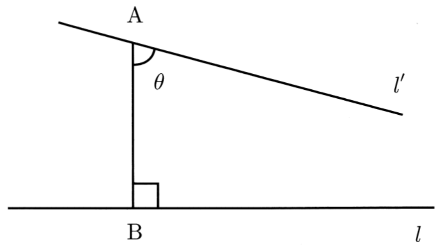


図 3　平行線角の定理.

は 2 直線が平行になるのは $\theta=\pi/2$ の場合だけであることはどなたもご存知のことでしょう．

発見当初は，双曲幾何学は頭の中の空想の産物であって，実際に目に見ることはできないものだと考えられていました．双曲幾何学を実際に目で見ることができたのは 19 世紀後半になって**幾何モデル**と呼ばれるものが発見されてからです．クライン，ベルトラミ，ポアンカレといった数学者たちが双曲幾何学を目で見るためのアイディアを提案しました．クラインモデル，ポアンカレディスクモデル，双曲面モデル，上半平面モデルなどの名称で呼ばれています．これも可視化と言ってよいでしょう．

ポアンカレディスクモデルと呼ばれる双曲幾何のモデルを紹介しましょう．このモデルにおける「全世界」は半径 1 の円板です．あなたはこの円板の上に定規を持って立っているとします．円板の中心に立っているときも，円板の端のほうに立っているときも，あなたにとっては定規の長さが単位長であることはもちろんです．しかし，外の世界の人から見ると，円板の中心から r の距離に立っているときのあなたの身長や定規の長さは，中心にいるときの $(1-r^2)$ 倍になっていると想像することはできるでしょうか．

このように空想すると，円板の端に近づくほど定規は短くなり，外の世界の人から見た「あなたにとって一歩の幅」は小さくなることになります．あなたが円板の端を目指して等速で歩いたとしても，いつまでたっても端にはたどり着けないことを計算によって示すことができます．

ポアンカレディスクモデルにおける直線とは図 4

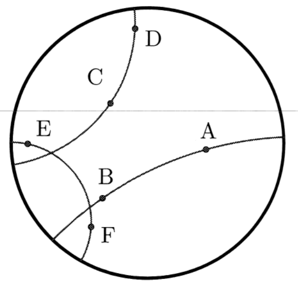


図 4　ポアンカレディスクモデルにおける直線．

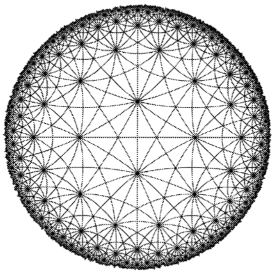


図 5　ポアンカレディスクモデルにおける三角形の敷き詰め．

のようになります．円板の上に立っているあなたにとっては直線なのですが，外の世界から見ると円板の縁に直交するような円弧に見えます（これが 2 点間の最短距離を与えていることは数学的に証明することができます）．ポアンカレディスクモデルに三角形を敷き詰めると図 5 のようになります．円板の端に近づくに従って三角形が小さく見えますが，これで**同じ大きさ**の三角形の敷き詰めなのです．

さて，このような 2 次元の双曲幾何の作図をインタラクティブに行えるソフトウエアがあるのをご存知でしょうか．コルテンカンプ，リヒター＝ゲバートが発表した作図ソフトウエア「**シンデレラ**（**Cinderella**）」です．日本語版[9,10]もあります．このソフトウエアで「双曲幾何」，「双曲表示」というモードにすると，ポアンカレディスクモデルでの作図が可能になります．

双曲幾何学は 1982 年のサーストンの問題提示[11]以来，位相幾何学の分野で活発に研究されており，この四半世紀に大きく発展しました．位相幾何学ではやわらかさのために図形の形を決めずに考察すると先に申し上げましたが，双曲幾何学には剛性（リジディティ）と呼ばれる「位相形を決めると大きさも決まる」という性質があるのです．この性質を用いて，図形（特に 3 次元多様体）が双曲幾何を内在的に含む（双曲計量を持つ）場合の分類問題が多いに進展しました．

特に結び目理論との結びつきの中で，結び目の補空間（$\mathbb{R}^3$ から結び目を取り除いた空間）の多くは双曲計量を持つことが知られており，形を決定することが計算により可能になりました．

結び目の補空間に双曲計量を考える問題についてコンピューターグラフィックスで解説したビデオ「Not Knot」[12]が有名です．これはエプシュタイン，ガンらがアメリカのジオメトリーセンターで作ったものです．この映像は，ユーチューブでも見ることができます．

「**SnapPea**」[13]は結び目のインターフェースを持った 3 次元双曲幾何学のためのソフトウエアです．作者はウィークスで，結び目の補空間に双曲計量を考えたものの構造を調べることができるソフトウエアで，こちらは研究者向けです．

3 次元双曲幾何学からはクライン群という研究対象もあります．簡単に言うと，3 次元双曲空間に図 5 のような図形の敷詰め方がどのくらいあるか，という問題です．入門的な記事[14]があるので参照してください．こちらはコンピューターグラフィックス花盛りです．ソフトウエアとして有名なのは和田昌昭さんの開発した「**OPTi**」[15]です．理論とグラフィックスについてバランスよく解説されている本として，“Indra's Pearls”[16]を挙げておきます．

■ 6.「てるあき」 ■

最後に著者の製作したソフトウエアを一つ紹介しておきます．曲面上の閉曲線を取り扱えるソフトウエアが「**てるあき**」です．「てるあき」については昨年 10 月に入ってから紹介記事[17]を執筆中ですのでそちらをご覧ください．ソフトウエアは[18,19]よりダウンロードできます．

「てるあき」では，図 6 のような曲面上の閉曲

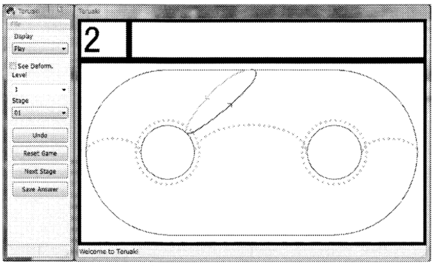


図6　写像類群の可視化ソフト「てるあき」.

線を取り扱うことができます．曲面上にはデーンツィストという自己同相写像が定義できるのですが，このソフトではデーンツィストによる閉曲線の変形をインタラクティブに見ることができます．自己同相写像のアイソトピー類全体からなる群を写像類群と言いますので，「てるあき」は写像類群を可視化したソフトウエアと言うことができます．写像類群はヘーガード分解やマッピングトーラスといった3次元多様体論における重要な道具を提供しますので，現在でも活発に研究が進められている分野です（ここに現れた専門用語の説明については上記文献17)をご覧ください).

7. 終わりに

位相幾何の分野での可視化の活動について紹介してきましたが，位相幾何学には「コホモロジー理論」，「コボルディズム理論」，「リーマン面の退化，退化の分裂族」，「シンプレクティック幾何学」，「接触幾何学」，「ゲージ理論」，「ザイバーグ・ヴィッテン理論」など，まだまだたくさんの研究分野があり，可視化できているのはほんの一部分なのです．ゆるさ・やわらかさや高次元問題が障害になっているのは事実ですが，これらの分野に対しても可視化へのチャレンジがこれから行われていくものと期待します．

参考文献

1) 「球面を裏返す Turning A Sphere Inside Out」日本語版（日本語版監修：三宅克哉），丸善 (1991).
2) 「アウトサイド・イン Outside In」日本語版（日本語版監修：三宅克哉），丸善 (1996).
3) G.K. フランシス著，笠原晧司，宮崎興二訳，『トポロジーの絵本』新装版（シュプリンガー数学リーディングス），シュプリンガー・ジャパン (2005).
4) http://www.youtube.com/watch?v=4nfBdc6sj4I
5) http://torus.math.uiuc.edu/jms/Videos/ke/
6) http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kodama/index.html
7) http://durian2.math.kobe-u.ac.jp/Movies/cm/2008-03-22-sd6-ochiai.html
8) http://www.math.meiji.ac.jp/~ahara/Kgairon/kg04/kg04-03.html
9) J. リヒター＝ゲバート，U.H. コルテンカンプ著，阿原一志訳，『シンデレラ—幾何学のためのグラフィックス』，シュプリンガー・ジャパン (2003).
10) http://sites.google.com/site/cinderellajapan/
11) 小島定吉，「サーストンの問題意識」数学セミナー，2005年3月号，pp.12–14, 日本評論社.
12) http://www.geom.uiuc.edu/video/NotKnot/
13) http://www.geometrygames.org/SnapPea-old/index.html
http://www.geometrygames.org/SnapPea/index.html
14) 秋吉宏尚，作間誠，「目で見る双曲幾何」，数学セミナー2005年3月号，pp.15–21, 日本評論社.
15) http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~wada/OPTi/index.html
16) D. Mumford, C. Series, D. Wright, "Indra's pearls", Cambridge Univ. Press (2002).
17) 阿原一志，逆井卓也，「パズルから入る写像類群入門（連載)」，数学セミナー2009年10月号より連載，日本評論社.
18) http://www.math.meiji.ac.jp/~ahara/teruaki.html
19) http://www.math.titech.ac.jp/~sakasai/index-j.html

（あはら・かずし，明治大学理工学部）

進化する“数学を視る技術”

河野　俊丈（聞き手：編集部）

1．数学教育における描画理解の重要性

――数学では初等幾何や関数などで描画やグラフなどを用いて理解する，あるいは描画が理解の助けになるケースがあるかと思います．教育現場の話なども含めて，お話をお聞かせいただけますでしょうか．

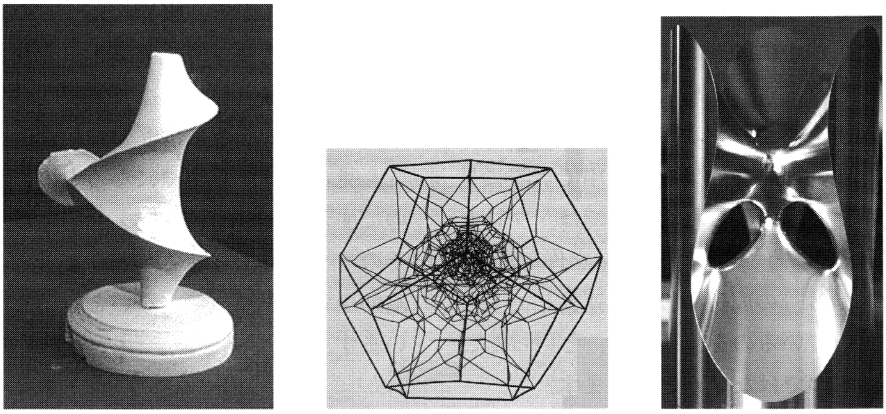
一般的に本などを見ますと，すでに完成された図が描かれているので，それを描くプロセスがなかなか実際には見えないですよね．しかし，授業で黒板などを使って初等幾何の証明などを描きながら説明していきますと，非常に理解の仕方が違うんですね．つまり，でき上がった図を見るのと，プロセスである思考方法を描きながら見せるのとでは大きな違いがあるわけです．また，研究論文などを読む場合でも，背後にある様々な試行錯誤は除去されてしまっていて，完成されたきれいな証明のみが示されています．著者は研究の過程では色々な図を描いたり，計算もしています．そういった意味で，途中のプロセスを実際に見せる，ということが教育上重要で非常に良い効果を生み出すものだと思います．



河野俊丈氏.

私の場合，黒板を使うだけでなく，学部の3年生の多様体の基礎の講義では，例えば「埋め込み」の概念などを，理論的に講義した後に球面の裏返しのビデオ[6)]を見せたりして補足しています．それは学生にとっては非常に新鮮に映るようで，概念的な話と描かれたものが結びつくということが理解の上で重要なようです．

歴史的には，例えば次のような例があります．ガウスはその書簡などから非ユークリッド幾何学の構想を持っていたと言われています．それは実際には出版されなかったわけですが，ガウスの手稿には非ユークリッド幾何学のモデルを示唆する図があるという話があります．クラインなどの仕事でも，今ならコンピュータで描かせるような極限集合を手で描いています．また，19世紀末から20世紀初めにかけては，描くだけでなく実際に石



(a) (b) (c)

図 1 (a) 19 世紀末に作られたドイツ製の石膏模型．クエン曲面とよばれる負の定曲率曲面．(b) 4 次元空間内の正 120 胞体の針金模型．(c) 現代の技術で制作されたアルミ製の 3 次曲面の模型（協力：ヤマダ精機）．

膏などの模型を作るということが盛んに行われました．20 世紀の半ばぐらいからは，数学の流れが抽象的な方向に向かっていき，模型の制作も下火になっていくのですが，それまでの時期は，描画や模型の制作が重視されていたようです．このような視点は現代の数学でも重要な意味を持っていると思います．

最初にクンマーが射影平面の模型を作って，ベルリンの科学アカデミーでそれを使って議論したのが石膏による幾何模型の組織的な制作の発端のようです．その当時の一線の数学者たち（クライン，クンマー，ブリル等）が監督者として関わっていたと伝えられています．

――今の話を聞くと，数学者はまるで設計士のような仕事もしていたんですね．

模型は教育的な目的に用いられたほか，当時の最先端の数学もそれによって視覚的に理解され，さらには数学の世界を越えて数学の持っているイメージが広まったきっかけの一つになりました．美術のほうにもずいぶん影響があったようです．

今ではコンピュータで 2 次元的に描かせるという技術は発達していますが，この研究室にある模型図 1(c) のように，実際に 3 次元の模型を作るということが忘れられがちです．客員講座や企業とも連携をとってそういうことも復活させようと計画しています．

――最近は，IPMU（東大数物連携宇宙研究機構）でも宇宙を知るのに幾何学を重要視しているようですが…．

IPMU は 2007 年に，数学，物理学，天文学における理論から実験までの幅広い分野の研究機構として東京大学の柏キャンパスに創設されたもので，私もメンバーの一人として加わっています．IPMU では数学者と弦理論などの理論物理学者が共同でセミナーを行っていますが，例えば，ブラックホールの研究にグロモフ・ウィッテン不変量などの最先端の幾何学の成果が用いられるなど，宇宙を幾何学的な手法を用いてとらえる試みがなされています．また，導来圏を用いたミラー対称性へのアプローチなどを見ますと，従来の意味の可視化を超えた新しい空間を視る方法が求められていることを感じます．

2. グラフィカルなテキスト

――最近の教科書は多色刷ですが，数学教育を考える上での多色刷教科書の利点や日本でのそうした教科書の普及など，未来像についてお聞かせい

ただけますでしょうか．

そうですね．確かに最近は多色刷の教科書が多く出るようになってきたと思いますが，まだまだ完全に今の技術を活かした本ができていないと感じます．とくに動画的な効果を本の中で実際に見せたり，また初等幾何の教科書などでは，プロセスが順番に見えるようなグラフィクスを作ったり，CD-ROMやweb等の周辺の教材と連動して本の絵が実際に動いているのを説明する，といったことが考えられるのではないかと思います．

最近では『Cinderella[1]』という平面幾何のためのソフトもありますし，フランスで高校生向けに開発された『Dimensions[5]』というビデオの日本語版が出ており，それは視覚的に高次元の図形をとらえられるような工夫が凝らされています．

3. 可視化とコンピュータ

――数学において，数式処理ソフトやグラフィックソフトを利用する上での効用にはどんなことがあげられるでしょうか．学生が考察を進める上でどんなことが重要になってくるかも含めて，お聞かせ願います．

もちろん『Mathematica』や『Maple』など一般的に使われているものもたくさんありますし，C言語などで自分でプログラムを組むこともあり得ますが，それ以外に専門的な研究のためのソフトが非常に多く作られています．まず，それらの動向を把握してもらうことが重要かと思います．

例えば，代数のための数式処理ソフトとか，群論に特化したものや，双曲幾何における極限集合，結び目の補集合の幾何学など，これらのソフトを有用に使うと，まずは何を証明できるのか，証明すべきなのかといった研究の方向性については色々な実験ができます．まずは証明にとりかかる前に，これらのソフトを使って実験をし，予想をたててみるといったことができるわけです．ただし，当然ながらそれで証明したことにして先に進むことはできませんから，限界というものも知っておいてほしいですね．何を実験すべきかということを知るためには，理論的な背景がやはり必要ですから….ソフトの中には非常に教育的なものもあって，見るだけでも勉強になるものもたくさんあるのですが，実質的に研究上利用する上でも，何をそのソフトにやらせるべきかを考える上では，理論的な背景を知っていないと使いこなせないと思います．

4. 研究支援のための多彩なソフト

――実際に使われているソフトについて，どんなものがあるのか簡単にお聞かせいただけますでしょうか．

そうですね．研究者が自分のために作ったものをオープンにしているケースが多いのですが，例えばジェフリー・ウィークスが作った『SnapPea[8]』というソフトは，結び目の絵を描くとその補集合の双曲計量の体積や不変量などを計算してくれます．こういったソフトがあることは，色々な例で実験してみたい人には良い環境だと思います．

また，代数では『Macaulay[13]』というソフトがあって，これは今まで手でやっていたようなホモロジー代数などの計算を，非常に巨大なものでも数式処理してくれます．有限群論などでも色々なものが出ていますね．

また，非線形の微分方程式の解の挙動などでも有用ですし，力学系におけるマンデルブロー集合の描画などもずいぶん細かい所まで描かれるようになりました．マンデルブロー集合の描画に関して言えば，20世紀半ばに初めてコンピュータで描かれたものは，点が少ししか見えないような状態でしたが，最近は進歩してグラフィクスから様々な予想をたてることが可能になってきました．

これ以外にも高校生や大学初年級向けにできたソフトなどもありますので，末尾のソフト一覧でいくつか紹介しておきます．

5. 影響を受けたこと

——先生が研究者になるに当たって影響を受けたことをお聞かせ下さい.

私は大学院生だった頃, 加藤十吉先生の研究室にいたのですが, セミナーのやり方が面白くて, 毎週メンバー全員がその週に考えてきたことを発表する形式で行われました. 普通に論文を紹介したりするのではなく, 常に何かを自分でやってこなければいけないんですね. 先輩たちもそういう雰囲気の中で自然に培われてきて, それから非常に刺激を受けました.

また, 私が大学院生の頃に, 当時興味を持っていた分野のかなり大きな国際研究会が日本で開かれたのですが, そこで発表できる機会があったことは大きかったですね. 当時論文でしか知らなかったような国内外の研究者と話をする機会が持てたのですが, 大学院生であった自分が最先端の研究者と直接議論できたということは非常に影響が大きく, そのときの研究交流がもとになって, その後のフランス留学のきっかけになったり, 後の研究の方向性の出発点になったと思います.

6. メッセージ

——これから研究者を目指す人や学生へのメッセージをお願いします.

今は情報の入手がやさしい時代になっていて, 研究がしやすい環境だと思います. 私が学生の頃は著者に手紙を書いたりして, 国によっては交渉が難しい場所もありましたが, 今はwebサイトを通して色々な国の人の新しい論文も読むことができ, 国による数学の強烈な個性の違いなども少なくなってきています. 情報を入手するという意味では, 研究がしやすい状況になっていると思うのですが, それゆえに逆に自分の線を出すということが難しい時代だと思うんですね.

どんなに魅力的な分野があっても, それに追随するだけでなく, 自分の研究方法を編み出していかなくてはいけない. 輸入する数学ではなくて, 自分から新しいものを作っていく数学をやっていく必要があると思います. それは先ほど話したような図を描いたり, 計算をしたりとか, 自分なりに時間をかけてやっていけば, この分野については自分にしかわからないような, そういう深さに到達することができると思うんですね.

素朴な疑問であっても, それが非常に大きな理論に将来発展することがありますから, 自分の感覚で自分の知りたいことを突き詰めて考えていくということを, 忘れないでほしいです.

——本日は貴重なお話をお聞かせ下さり, 誠にありがとうございました.

(2009年8月, 東京大学駒場キャンパス研究室にて)

数学の教育, 研究支援のためのソフト

●可視化プログラム

1) Cinderella (平面幾何) http://sites.google.com/site/cinderellajapan/
2) Grapes (関数グラフソフト) http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/
3) 3D-XplorMath (曲線, 曲面など) http://tmugs.math.metro-u.ac.jp/s-3dxm/index-j.html
4) Curved Spaces http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/

●幾何学に関するビデオ

5) Dimensions http://www.dimensions-math.org/
6) Outside In (球面の裏返し)
7) Not Knot (リンクの補集合の双曲幾何構造)

●研究支援のためのソフト

— 幾何学

8) SnapPea http://www.geometrygames.org/SnapPea/
9) OPTi http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/wada/OPTi/index.html
10) Knot program http://www.math.kobe-u.ac.jp/kodama/top-comp-2005.html
11) K2K http://amadeus.ics.nara-wu.ac.jp/~ochiai/
12) Knotscape http://www.math.utk.edu/~morwen/knotscape.html

— 代数学

13) Macaulay http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/
14) GAP http://www.gap-system.org/

— 数式処理ソフトなどの集成

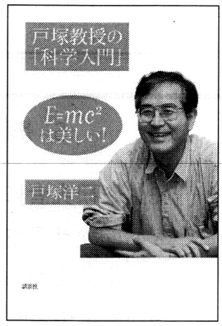
15) Knoppix/Math

(こうの・としたけ, 東京大学大学院数理科学研究科)

書評

戸塚教授の「科学入門」

$E = mc^2$ は美しい！



戸塚洋二著，四六判，240 頁，本体 1400 円，講談社

戸塚さんは素粒子のニュートリノに質量があることを発見した著名な物理学者であった．しかし，癌に侵され，期待されたノーベル賞ももらわぬまま亡くなった．

その闘病生活の最後の 1 年間に，余命を意識しながらコンピュータのブログを綴っていた．そこには，医学は専門ではなくても科学者として自分のガンを理解しようと，壮絶な冷静さで分析を試みながら，その一方で，科学の重要な発見・進歩を簡明に解説して，人々に科学の面白さ，素晴らしさを伝え，若者が未来へ挑戦してほしいという願いを込めた．

この本は，そのブログに書かれた科学入門記事を中心にまとめたもので，読んでいて戸塚さんの若者への暖かい眼差しが伝わるものばかりである．

科学入門と言っても，式はほとんど使わず，易しさを最優先している．前書きによれば，生前，奥さんに「君にもわかれば誰にでもわかる」と言って読んでもらっていた，という微笑ましいエピソードが記されている．

本は，初めに逝去 2 週間前に行われた東京大学の 1，2 年生による自宅でのインタビューから始まる．ここには，戸塚さんの生い立ちや，学生時代，ドイツ出張時代の思い出を，インタビューアーたちは，巧まず上手に引き出している．例えば，ドイツで装置建設中に大変な困難に出会い，行き詰まり，苦悩したこと，周囲のドイツ人たちに相談したことが解決につながり救われたこと，そのことから独りで問題を抱えず周囲に相談することの大事さ，チームプレーの大切さを学んだというエピソードが語られている．

次から 6 つの章のブログ記事がある．初めの章は，キリスト教から科学を解放した 2 人の科学者，ガリレオとダーウィンについての記述から始まる．判りやすい文章である．戸塚さんは多くを省いて本質だけを簡潔に書くのに長けた人だった．思い出せば，国際会議で戸塚さんが講演をするときも，あるいは文部省に予算の要求書を書くときもそうだった．この本でもその特徴が発揮されている．

2 番目の章では，量子力学の正統的な理論にアインシュタインが抵抗した話，一方，アインシュタインが相対性理論を発見したおかげで科学技術が進歩し，現在の我々がいかに恩恵を受けているかという話が紹介される．そこにはまた，戸塚さんの知人で早世した天文学者バコールへの友情，偉大な科学者ベーテの思い出なども綴られる．次の章には植物への興味が記される．植物は戸塚さんの専門からは遠いが，彼は身近な植物を興味津々の好奇心で観察し，環境へ植物が適応する柔軟さに感激しながら，未知への探求心を記している．4 番目の章は最も長い章で「光の科学」と題して，光の波動説と粒子説，プランクの光量子から始まった量子力学，さらには，相対性理論，ビッグバン宇宙，などの科学史を光と関連させて面白く解説する．この章に興味をもった読者はさらに朝永振一郎著『量子力学 I』（みすず書房）を読むのもよいだろう．

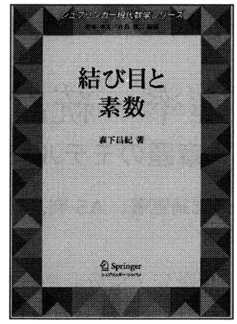
5 番目の章は，戸塚さんの専門のニュートリノである．さすがに深い経験から，ニュートリノの不思議さが科学の歴史としてとても判りやすく書かれている．そして 19 世紀末に存在した科学の重大な謎が，20 世紀の科学の大発展につながる種であったことに鑑みて，21 世紀の科学の大発展につながる 20 世紀末の謎は何か，という問いかけを行い，戸塚さんの考えが記されている．6 番目の章は，宇宙の色々な階層のスケールと，自然さとは何か，という問いかけや，将来の科学の発展の方向についてのコメントが記されている．最後に，ブログではないが，戸塚さんが亡くなる 3 年前に，高エネルギー加速器研究機構の機構長であったときの講演「素粒子と宇宙」が載せられている．素粒子研究の今後の展望を専門用語を使わずに判りやすい言葉で語っている．

この本は，闘病の中で短い間に書かれたにも関わらず，現代科学の本質だけを戸塚さんらしい方法で簡潔に判りやすい言葉で書いたもので，科学への誘いであり，戸塚さんの未来への心温まるメッセージである．とくに若い人たちが，この本から科学の面白さや科学的な考え方を感じてほしい，と思う本である．

荒船　次郎（東京大学名誉教授）

結び目と素数

森下昌紀著，A5 判，216 頁，本体 3800 円，シュプリンガー・ジャパン



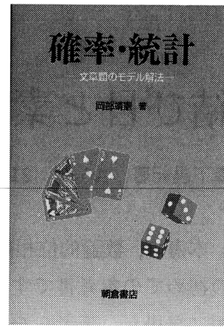
本書は，数論的位相幾何学（Arithmetic Topology）の初めての参考書です．数論的位相幾何学は，近年分類に登場し，著者らを中心とした研究により発展が目覚ましく，注目を浴びている領域です．その基本的な考え方は結び目と素数の類似性に基づいています．結び目理論と整数論は，今から約 200 年前の C.F. Gauss（1777–1855）による，まつわり数と平方剰余の研究にその歴史の源泉の 1 つを見出すことができます．その後分かれた 2 つの道を現在の視点から見直し，それぞれの諸概念，諸理論の間の類似性を平行的に論じ，両者の間に橋を架けることが本書の目的となっています．

もう少し詳しく説明します．結び目とは円周 S^1 から 3 次元球面 S^3 への埋め込みのこととし，結び目とその像 K とを同一視します．そこで，素数 p に対して定まるアフィンスキームの間の射 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ を，結び目 $S^1 \hookrightarrow S^3$ の類似と見なします．可換環の圏とアフィンスキームの圏は反同値になるので，可換環の代数的な性質はアフィンスキームについての幾何的な言葉で言い表すことができます．結び目 K の絡み具合を反映するものとして，結び目群と呼ばれる，結び目補空間の基本群 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ がありますが，素数 p の "絡み具合" はエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \setminus (p))$ に反映されます．この群は，p と無限素点の外で不分岐な有理数体 $\mathbb{Q}$ の最大 Galois 拡大の Galois 群と同型で，素数群と呼ばれます．より一般に，素数の有限集合 S に対し，$\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \setminus S)$ は S と無限素点の外で不分岐な $\mathbb{Q}$ の最大 Galois 拡大の Galois 群という代数的整数論における古典的対象であり，結び目理論における，絡み目 L（2 つ以上の結び目が互いに絡まり合ったもの）の絡み目群 $\pi_1(S^3 \setminus L)$ に対応します．Galois 対応により，空間の形を記述する基本群を考えることと被覆全体を考えることは同等ですが，エタール基本群の場合も同様で，エタール被覆全体の有様を調べることによって，スキームの形を（心の眼で）見ることができます．本書はこのような絡み目群と分岐条件付き Galois 群の類似性という視点から出発します．

本書は，読者が予備知識を極力必要としないで済むように，第 0 章で，準備的な事柄が定義から丁寧に述べられています．この章に限らず，全体を通じて自己完結するように配慮がなされています．以降の本書の概要ですが，第 1 章では，3 次元多様体と代数体の整数環，結び目と素イデアルの間に見られる基本的な類似性について解説されています．第 2～4 章では，Gauss のまつわり数と平方剰余，種の理論を第 1 章の類似の視点から統一的に見直しています．第 4 章以降には，著者のオリジナルの結果が多く含まれています．第 5 章では，絡み目群に関する Milnor の定理と分岐条件付き副-l Galois 群（l は素数）に関する Koch の定理の類似性を見ます．さらに第 6 章では，素数たちに対して，絡み目の高次まつわり数（Milnor 不変量）の類似物を導入しています．第 8 章では，種の理論の拡張及び高次化について述べられています．第 7, 9, 10 章では，結び目補空間の無限巡回被覆と代数体の $\mathbb{Z}_p$-拡大を類似と見ることにより，Alexander–Fox 理論と岩澤理論を平行的な形で扱います．さらに第 11, 12 章では，結び目群と素数群の表現のモジュライの視点から，Alexander–Fox 理論と岩澤理論及びその非 Abel 化が平行的に論じられています．

本書は著者が過去数年間に行った集中講義が基になっていますが，評者は平成 14 年 12 月に九州大学でその講義を受ける機会に恵まれました．講義に感銘を受け，後輩と共に講義録を作成したり，その後，著者の助言もあって，自身の研究に取り入れたりしましたが，その際に，本書の目的でもある，結び目理論と整数論の間に橋を架けてくれるような文献が少なく，非常に苦労いたしました．関係分野について詳しい文献は多々ありますが，評者の前ではどれもそっぽを向き合っているように思えて，例えるならば，非力な仲介役が，大物たちのご機嫌をとりながら延々と話し合いをするような作業でした．本書では，その大物たちは仲良く肩を寄せ合ってこちらに微笑みかけてくれていて，安心して 2 つの理論の間に架けられた橋を渡ることができます．本書を手元に置き，何度も読み返すうちに，既知の事柄には新たな発見があり，馴染みのなかった事柄には親しみを持って接することができる，そういう読み方のできる本ではないかと思います．

大溪　幸子（防衛大学校総合教育学群）



確率・統計

文章題のモデル解法

岡部靖憲著，A5 判，196 頁，本体 2800 円，朝倉書店

「微分・積分」や「線形代数」ほどではないが，「確率・統計」の教科書はすでに相当の数が出版されている上に，毎年，新しいものが何冊も現れる．それだけに，確率論，統計学分野の専門家にとって，新しい一冊を付け加える，ということは，非常に困難でもあるが，チャレンジングな仕事でもある．

問題の核心は 2 つある．第一に，内容が入門者向けであり，大学教育のカリキュラムの中で教えるべき内容が固定しているため，独自色を与えることが難しい．実際，書店の「確率・統計」の教科書の棚の前に立って，数冊を抜き出して検分してみれば，それらが扱っている内容には，一見して分かるような差異がほとんどない．

第二に，「確率・統計」という分野の特殊性がある．確率論と統計学は，（少なくとも日本では），それぞれ異なる原理に基づいて，異なる人々によって研究されている，2 つの異なる分野なのである．実際，確率論の研究者の多くは，自分たちは純粋数学の研究者であって，すなわち数学者であるが，統計学の研究者たちは応用数学者に「過ぎない」と思っている，とうかがわれる節がある．（もちろんこれは現代数学の立場にも，おそらく本誌の立場にもそぐわない見方だが，それはまた別の問題である．）このように「確率・統計」においては，確率的問題について理論と応用の両面を分離して扱わざるを得ず，しかも，「確率とは何か」「統計的推測とは何か」という問いかけに起因する，非常に困難だが重要な非数学的問題を，「ごまかす」か「無視する」にせよ，どうにかしなければならない．

さて，本書ではこの 2 つの問題がどう扱われているか．「文章題のモデル解法」という副題に表されているように，著者の用意した方針は，モデリングと実験数学の考え方を「確率・統計」の教育に応用することである．このことが著者による独自色であり，これによって第二の問題にもアプローチする．これを著者は，「純粋数学の心」を大切に「データからモデル」の姿勢で展開することである，と書いている．時系列解析の数学的研究の第一人者である著者によれば，これは，今までの知識とは異なる振舞いをしている時系列データを，いかに数学的に解析，研究するか，という問題から立ち現れてきた態度であると言う．つまり，従来の応用数学に見られるような，天下り的に都合の良いモデルを立て，そのモデルを観測されるデータにあてはめ，応用する，という「モデルからデータ」の方向では，このような問題には対処できない．逆に，「データからモデル」の方向で，データの奥に潜む構造を抜き出し，新たな事物を発見し，それを定式化してモデルを立て，その研究を通じて法則に至る，という道筋を取らねばならない．これが著者の理念的な立場である．

しかし，著者のこのような理念を，「確率・統計」の初等的な教科書に反映することは極めて難しい．この課題に対して著者は，以下のような方針で「確率・統計」の文章題をシステマティックに解く，ということで挑戦している．つまり，「確率・統計」の文章題に対して，1.「適切な集合を用いてモデル構築する」，2.「注目する集合を明確にし，その直和分解を考える」，3.「集合の要素の個数に関する公式を適用する」という 3 つのステップを常に意識的に適用するのである．

著者はさらに，このステップ 1 が「空即是色」であり，ステップ 2 と 3 が「色即是色」であると述べており，これを発展させた著者の思想が「あとがき」にまとめられている．そこに述べられている思想は極めて興味深いものであるが，私は悟りを求めつつも未だ大悟に至らず，この部分を評する資格はない．

それはさておき，上のようなステップを一貫して適用する，という態度は，初学者にとって明快であり，教育的効果のあるものと思われる．この教科書は以上に述べたような，挑戦的な意識を持ったものではあるが，教えるべき正確な知識をきちんと整理して紹介し，また，文章題をシステマティックに解く一貫した手法を示しているという 2 点からして，標準的な教科書として薦められる．著者の思想の香りを初等的教育には余計だ，と思うか，初等的段階であるからこそ重要だ，と考えるか意見は分かれるだろうが，いずれにせよ，押さえるべきところをきちんと押さえた，読み易く，理解し易い教科書である．

原　啓介（ACCESS Co., Ltd.）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

野崎 昭弘

1980年2月号

多値論理関数族の完全性は極めて特殊な分野であるが，それでも30年間にはいくつか大きな進展があった．ここでは詳細は述べられないが，前回の寄稿に関係する成果をいくつか紹介してみたい．

土台となる集合 X を $\{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$ とすると，X 上で定義された関数のある集合 F が完全であるための必要十分条件は，F がいかなる極大（非完全）関数族にも含まれないことである．そこで極大関数族の分類が鍵となるが，前回述べたように遅れつきの多値論理関数族については，すべての極大関数族の特徴付けができていた．その後かなりの範囲で極大関数族が決定できたが，まだ一部分が残っている（疋田輝雄 2005）．

一方，遅れなしの（普通の）関数族については，極小関数族の分類・決定や，関数族のクラスの（位相的・代数的）構造を調べる研究が進んでいるが，この方面では町田元氏がよい仕事をしている．

前回挙げたペシェルの問題（私は同氏から教わった）は否定的に解かれ，その拡張版は肯定的に解けた．

問題：有限半順序集合 X 上の多変数単調関数の全体 M は，有限関数族から生成できるか？

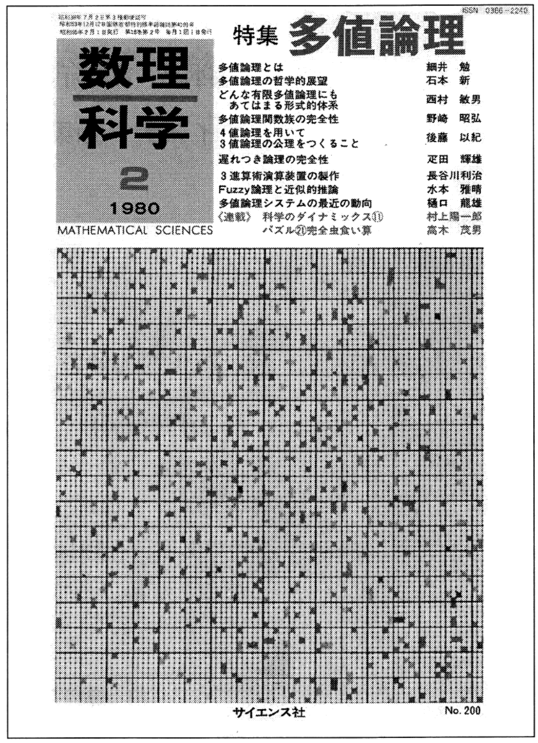
解答（タルドス 1986）：ある（有界）半順序についての単調関数族は，有限関数族からは生成できない．

拡張版：一部の関数値が “未定義”（don’t care）でもよい，いわゆる部分関数族についてはどうなるか？

解答（野崎 2000）：どんな半順序についても，単調部分関数族はすべて有限生成である．

ところでこれまでの完全性の問題は，電子回路の言葉で言えば「記憶能力はない素子」で「フィードバックループを含まない回路」を組み立てることによって，すべての多値論理関数が実現されるかどうか，を問うていた．そこで次のような拡張が考えられる．

(1) 素子として，記憶能力を持つ「有限オートマトン」を考える．



(2) 回路として，フィードバックループを含む回路（いわゆる順序回路）を考える．

(1) については，否定的な結果が知られている．

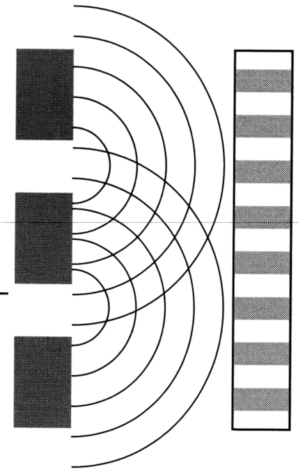
解答（ダッソー 1981）：有限オートマトンの有限集合が完全であるかどうかを一般的に判定するアルゴリズムは存在しない．

(2) については，単位遅れつき論理関数族（$k=2$）の場合だけ解決された（野崎 1981）．$k \geqq 3$ の場合についての問題 (2) は手ごわくて，まだ何の進展も見られない．遅れつき多値論理関数の極大関数族の決定と併せて，さらに30年後が楽しみである．

（のざき・あきひろ，日本サイバー大学 IT 総合学部）

目で見て学ぶ量子力学

第16回 実験でひもとく量子の不思議



磁力線の観察から超伝導を考える

マイスナー効果，ゲージ対称性とその破れ

外 村 彰

16.1 はじめに

第二種超伝導体に磁場を印加すると，磁力線が超伝導体内部から排除される．磁場がさらに強くなると，排除しきれずに，細い糸の形の磁力線が内部に取り残される．この場合，超伝導電流の渦や磁束は量子化される．これが“磁束量子”である．今回は，電子波で見た磁力線の振舞いから，超伝導の内部で，どんなことが起こっているのかを考えてみたい．

16.2 超伝導体内部で何が起こっているのか？

超伝導体に磁場を印加しながら，外部に出てきた磁力線を電子波で観察すると，内部の“クーパー・ペアの波”が温度や磁場に依存して，様々な振舞いをすることが分かる．

超伝導体の内部には，巨視的なクーパー・ペアの波が生じ，シュレディンガー方程式と類似の式に従う．その波動関数を $\Psi = R\exp(i\theta)$ とおき，磁場をかけたときの反応を考えよう．R と θ は，いずれも実数値をとる関数である．$|\Psi|^2 = R^2$ は，もはや電子の場合のように“電子の存在確率”ではない．たくさんのクーパー・ペアが同じ状態に凝縮した超伝導では，$|\Psi|^2$ は“電子密度”ρ そのものになる．

θ は，波動関数の“位相”で，波の挙動を決める上で，最も重要な量である．θ は，第 12 回で考えた電子波の場合と同様の式で求められる．ただし $\theta = \frac{S}{\hbar}$ である．

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{m^*}\left(\mathrm{grad}\theta + \frac{e^*\boldsymbol{A}}{\hbar}\right)\rho. \tag{16.1}$$

$\boldsymbol{j}$ は "流れの密度" で，$\rho\boldsymbol{v}$ に等しい．$\boldsymbol{v}$ はクーパー・ペアの速度である[傍注1]．m^*, e^* は，それぞれクーパー・ペアの質量と電荷の絶対値である．(16.1) 式を，$\boldsymbol{v}$ で書き表すと，

$$m^*\boldsymbol{v} = \hbar\,\mathrm{grad}\theta + e^*\boldsymbol{A} \tag{16.2}$$

となる．位相 θ を積分形で表すと

$$\theta = \frac{1}{\hbar}\int (m^*\boldsymbol{v} - e^*\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{16.3}$$

となる．これらの式を使って，クーパー・ペアの波の振舞いを考えていこう．

(a) 電流も流れていない磁場もかかってない超伝導体

まず，ひとかたまりの超伝導体に磁場もかかっていないし ($\boldsymbol{A} = 0$)，電流も流れていない ($\boldsymbol{j} = 0$) 場合を考えよう．(16.1) 式から，θ は，$\mathrm{grad}\theta = 0$ なる条件を満たすことになる．つまり，位相 θ は，超伝導体内部で一定の値を持つ[傍注2]．

だが，磁場をかけると，とたんに "クーパー・ペアの波" が反応する．超伝導円盤が磁石の上に浮いてしまうのを見たことがあると思う（図 16.1）．これが，"クーパー・ペアの波" の反応の一例である．通常の物質を磁石の上に置いても，こんなことは起こらない．磁場が，物質を素通りするためである．電磁場の方程式である "マックスウェルの方程式" は，物質中であっても，その効果を物質定数 ε, μ の中に組み込めば，そのままの形で通用する．しかし，超伝導体の場合，ε や μ で事を済ませる訳にはいかないので，ちょっと面倒である．

「磁場をかけると超伝導体内部で何が起こるのか？」—"クーパー・ペア" の波の反応を考えてみよう．

(b) 超伝導体に磁場をかける—マイスナー効果 —

電磁場の振舞いは，マックスウェルの方程式，とくに，"アンペールの法則" $\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ と，"電磁誘導の法則" $\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ で決まる[傍注3]．今は，時間変化のない場合を考えているので，$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ と $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ は共にゼロになり，問題になるのは，純粋なアンペールの法則である．

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_o\boldsymbol{i} \tag{16.4}$$

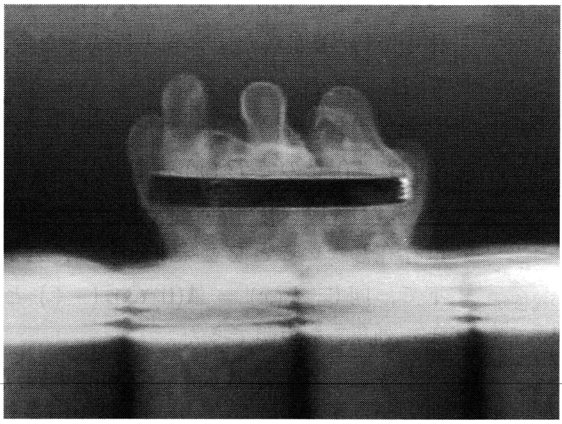


図 16.1　磁石の上に浮上する超伝導円盤．

[傍注1]　クーパー・ペアは，普段は静止している．電流が流れると，クーパー・ペアの重心が $\boldsymbol{v}$ の速度で動く．

[傍注2]　場所によって位相変化のない，つまり，波立っていない波は，想像しにくい．海岸に打ち寄せる水面の波は位相変化があるので，山と谷がある．強いて言えば，沖に出て波長の長い波がやってきて水面がゆっくり上下する状態がそれに近い．

[傍注3]　電磁気では，渦 (rotation) が基本的な役割をしている．磁場は，"ベクトル・ポテンシャルの渦" ($\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$) であり，電流は "磁場の渦" ($\boldsymbol{i} = \mathrm{rot}\boldsymbol{H}$) である．第 15 回で，水の流れと対比して長々と渦のことを考えたのは，こうした理由があるからである．

磁場をかけたときのクーパー・ペアの波の反応は，(16.1) 式で与えられる．“流れの密度” $\boldsymbol{j}$ を電流密度 $\boldsymbol{i}$ を使って，$\boldsymbol{i}=-e^*\boldsymbol{j}$ でおきかえると，

$$\boldsymbol{i}=-\frac{e^*\hbar}{m^*}\left(\mathrm{grad}\theta+\frac{e^*\boldsymbol{A}}{\hbar}\right)\rho \tag{16.5}$$

となる．

ひとかたまりの超伝導体の中では，電流 $\boldsymbol{i}$ は，どこにも行き場がないし，わき出しも吸い込みもない．つまり $\mathrm{div}\boldsymbol{i}=0$ である．そこで (16.5) 式の div を取ると，$\nabla^2\theta+\frac{e^*}{\hbar}\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$ となる．ここで $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$ なるゲージをとる．すると，$\nabla^2\theta=0$ となる．θ は “調和関数” になる[傍注4]．

これを解けば，超伝導体内部でのクーパー・ペアの波の位相 θ の分布が求められる．超伝導体表面に垂直な方向への位相の変化がないという条件で，この式を解くと，$\mathrm{grad}\theta=0$ つまり θ が一定の値になる．何のことはない．磁場がかかっていないときと同様，“クーパー・ペアの波” の位相は一定になってしまう．ただ，このためには，(16.5) 式から，

$$\boldsymbol{i}=-\frac{(e^*)^2\rho}{m^*}\boldsymbol{A} \tag{16.6}$$

が成り立つ必要がある．ということは，ひとかたまりの超伝導体内部に $\boldsymbol{A}$ が存在すると，$\boldsymbol{A}$ に比例した電流 $\boldsymbol{i}$ が流れることになる[傍注5]．ρ はクーパー・ペアの密度なので電子密度 n で表すと，$n=2\rho$，さらにクーパー・ペアの電荷 e^* と質量 m^* を $e^*=2e,\ m^*=2m$ とおくと，(16.6) 式は

$$\boldsymbol{i}=-\frac{e^2n}{m}\boldsymbol{A}=-c\boldsymbol{A} \tag{16.7}$$

になる．ここで $c=\frac{e^2n}{m}$ である．

かくして，クーパー・ペアの波の位相 θ は，$\boldsymbol{A}$ が存在する場合にも，一定になるが，その条件として $\boldsymbol{A}$ に比例した電流 $\boldsymbol{i}$ が流れることが分かった．これで，“マイスナー効果” を証明する準備が整った．

まず超伝導体内部での電磁場の様子を調べるために，(16.7) 式をマックスウェルの式，(16.4) 式 $\mathrm{rot}\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})=\mu_o\boldsymbol{i}$ に代入してみよう．$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ なる公式を使うと，$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_o\boldsymbol{i}$ となるので，$\boldsymbol{i}$ に (16.7) 式を入れれば，$\nabla^2\boldsymbol{A}=\frac{\mu_oe^2n}{m}\boldsymbol{A}$ となる．これが超伝導体中での $\boldsymbol{A}$ が満たすべき方程式となる．この式の回転（rotation）を取ると，$\nabla^2\boldsymbol{B}=\lambda^2\boldsymbol{B}$ となる．ここで，$\lambda=\sqrt{\frac{m}{\mu_oe^2n}}$ である．

超伝導体表面から x だけ内部に入ったときの $\boldsymbol{B}(x)$ がどうなるかを解くと，$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$ なので $\boldsymbol{B}(x)=\boldsymbol{B}(0)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$ となる．λ は “磁場侵入長” と呼ばれる．$\boldsymbol{B}$ は，超伝導表面から λ の距離だけ侵入するが，それより内部には $\boldsymbol{B}$ は存在しないことを意味する[傍注6]．$\boldsymbol{A}$ についても，$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$ というゲージの下で，同じ $\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}(0)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$ という式が得られる．こうして “マイスナー効果” を説明できた．

ややこしかった数式を，物理的な観点から振り返ってみよう．超伝導体に磁場を印加すると，“クーパー・ペアの波” が $\boldsymbol{A}$ によって位相変化を受け，(16.7) 式 $\boldsymbol{i}=-c\boldsymbol{A}$ で与えられる電流 $\boldsymbol{i}$ が超伝導体表面に流れる．この電流によって

［傍注4］ 第 15 回で学んだ “渦なし ($\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=0$) の非圧縮流体の速度ポテンシャル $\phi\,(\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\phi)$” も調和関数だった．超伝導体内部は，磁場がゼロなので，$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$ となる．さらに $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$ というゲージとすると，$\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\chi$ とおくことができる．すると (16.5) 式より $\mathrm{grad}\theta=-\frac{e^*}{\hbar}\boldsymbol{A}$ となる．この式に $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\chi$ を代入すれば，常数を除いて $\theta=-\frac{e^*}{\hbar}\chi$ となる．つまり θ や ϕ だけでなく $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ の場合，ゲージ関数 χ も調和関数になる．

［傍注5］ 我々は，電場 $\boldsymbol{E}$ をかけると電流 $\boldsymbol{i}$ が流れるという “オームの法則”，$\boldsymbol{i}=\sigma\boldsymbol{E}$，を頭の中にたたき込まれてきた．しかし，原子や超伝導体の中では，電子が波として振舞い，抵抗 $\frac{1}{\sigma}$ がゼロになる．このとき $\boldsymbol{E}$ が存在すると電流が無限に流れることになる．このため，超伝導体の中では，$\boldsymbol{E}=0$ で，電流が流れるのは，磁場がかかったときなのである．

［傍注6］「超伝導体に磁場をかけると，表面に $\boldsymbol{A}$ に比例した電流が流れ，内部の $\boldsymbol{A}$ は “常に” ゼロになってしまう」と思う方もいると思う．実は，そうではない．これは，ひとかたまりの超伝導体でのみ成り立つ．ドーナツ状の超伝導体の場合には，成り立たなくなる．ドーナツの孔の中を磁束 Φ が通っている場合，$\boldsymbol{A}$ は $\oint\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\Phi$ を満たさなければならないので，たとえ超伝導体の内部でも $\boldsymbol{A}$ はゼロではない．この場合，$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ はゼロなので，$\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\chi$ と表せる．ドーナツ内部の線積分 $\oint\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ の経路が，孔を一周しない場合にはゼロだが，孔を一周する経路では，$\frac{nh}{2e}$ になる（n は周回の回数）．$\boldsymbol{A}$ はドーナツ状の超伝導体内部に存在したとしても，$\boldsymbol{B}$

を伴わない $\boldsymbol{A}$ で，電流を流したりしない．結局，$\boldsymbol{i} = -c\boldsymbol{A}$ は，単連結の超伝導体にしか成り立たない．

生じた磁場は，それまで内部に存在した磁場を打ち消してゼロにする．“クーパー・ペア” の波の位相は一定になり，コヒーレントな波の状態を維持して “超伝導状態” を破らずにすむことになる．

しかし，(16.7) 式 $\boldsymbol{i} = -c\boldsymbol{A}$ をよく考えてみると，不思議である．ゲージ変換の自由度がある $\boldsymbol{A}$ が，$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$ という条件下ではあるが，“電流” という観測可能な物理量になっている．ゲージ理論を信奉している人にとっては，心おだやかではあるまい．南部陽一郎先生が J.R. シュリーファーから未発表の超伝導の理論を初めて聞いたとき，ゲージ不変性をないがしろにしている理論に驚いたという．そして，この問題を 2 年間考えた結果，マイスナー効果は，ゲージ不変性という大原則を破っている訳ではなく，“自発的に” 対称性が破れてゲージが固定されて起こることを突き止めた[傍注 7 1)]．つまり，これまでの超伝導の理論も，そこから導出された (16.7) 式も近似であり，厳密な取扱いをすれば，ゲージ不変性も電荷の保存も保証される．

[傍注 7]　“対称性の自発的破れ” は，自然現象の中でしばしば観測される．磁性体の温度を下げると，各原子のスピンが一方向に揃って磁化される．スピンがどの方向に揃っても，エネルギーは変わらないのに，相転移の際に，磁性がかかっていなくても，ある方向に磁化される．“ゲージ対称性の破れ” は，これほど直観的ではないが，統一理論に大きな影響を与えた．ゲージ原理は破れていないが，実際の現象は “自発的に” 対称性が破れて，現実の複雑な世界を形作ることになる．

(c) ドーナツ状の超伝導体の孔の中に磁束を通す—磁束量子化—

次に電子波による AB 効果と同様の状況をクーパー・ペアの波で考えてみよう．AB 効果では，コイルのまわりを電子波が取り囲むが，電子波の代わりに，ドーナツ状の超伝導体を配置してみるのである．こうすれば，クーパー・ペアの波がコイルを取り巻くことになる（図 16.2）．

実験では，まずコイルに電流を流し，次に超伝導体を冷やして超伝導状態にする．磁場は超伝導体に触れていないので，「超伝導体内部には磁場 $\boldsymbol{B}$ も電流 $\boldsymbol{i}$ も，そして $\boldsymbol{A}$ も存在しないはずだ」と思うだろう．ところが，そうではない．ドーナツ状伝導体内部の，孔のまわりを取り巻く経路に沿ってストークスの定理 $\oint \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \Phi$ を適用してみる．すると，超伝導体内部にも，$\boldsymbol{A}$ が存在していなくてはならないことになる．

ひとかたまりの超伝導体では，磁場がかかったときには，表面だけに電流 $\boldsymbol{i}$ を流して位相 θ を一定に保ち，超伝導を維持した．内部には $\boldsymbol{A}$ も $\boldsymbol{B}$ も存在しない．しかし，ドーナツ状の超伝導体の中には，$\boldsymbol{A}$ が存在し得る．ということ

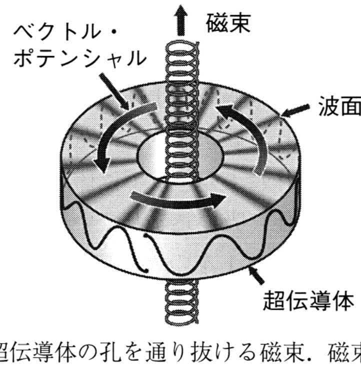


図 16.2　ドーナツ状の超伝導体の孔を通り抜ける磁束．磁束の周りには，磁束を取り巻く $\boldsymbol{A}$ の流れが生じる．$\boldsymbol{A}$ によってクーパー・ペアの波の位相が変化するが，磁束がちょうど $\frac{h}{2e}$ の整数倍に一致しないと，一周りした波面が元の波面と一致せず，超伝導状態は破れてしまうことになる．

は，AB 効果によって，“クーパー・ペアの波” の位相 θ は変化し，もはや一定ではなくなる．

孔のまわりを一周して元に戻ったクーパー・ペアの波は，波の山と山がくい違ってしまう．これでは，コヒーレントな波が存在できなくなる．この様子は図 16.2 に図示してある．だが例外がある．孔の中を通るコイルの磁束が，$\frac{h}{2e}$ の整数倍であれば，波の位相がちょうど波長の整数倍だけ変化するので，波の山と山が重なって問題なくなる．安定な状態を保ちたいクーパー・ペアの波は，ドーナツの孔の内壁に電流を流して磁束をちょうど $\frac{h}{2e}$ の整数倍にすることによって波を存続させる．

しかし，「“クーパー・ペアの波” は，磁場に触れてもいないのに，何故，磁束の過不足を知り，位相を調整することができるのだろうか？」—マイスナー効果では，磁場は超伝導体の内部にごくわずかだが侵入していた．だが，今の場合，磁場は超伝導体に全く触れていない．しかし，ドーナツ状超伝導体の孔の中に磁束が通っていると，内部に $\boldsymbol{A}$ が存在せざるを得ない．“クーパー・ペアの波” は，この $\boldsymbol{A}$ を位相として感じ取り，内壁に超伝導体電流を流して，余分な磁束 $\varDelta\varPhi$ を加えて，全磁束 $\varPhi+\varDelta\varPhi$ を $\frac{nh}{2e}$ にする．“クーパー・ペアの波” が孔のまわりを一周したとき，位相はちょうど n 波長だけずれることになる[傍注8]．まさにクーパー・ペアの AB 効果である．

［傍注 8］ 超伝導体内部では $\boldsymbol{B}$ はゼロである．$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$ なので，$\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\chi$ とおくことができる．ただ，孔のまわりを一周したとき，χ の位相は $\frac{nh}{2e}$ だけ変化するので，χ は一価関数ではなくなってしまう．

「どの n の値が実現されるのだろうか？」—$\varDelta\varPhi$ の絶対値が一番小さい n が自動的に選択される．流す電流 $\boldsymbol{i}$ が一番小さくて済むからである．実に美事な仕組みである．AB 効果の検証実験で使ったドーナツ状磁石の中では，こんな現象が起こっていたのである．

(d) ひとかたまりの超伝導体に強い磁場をかける—磁束量子の発生—

ついで，第二種超伝導体に磁場をかけたときに磁束量子が生じる理由を考えよう．

超伝導体薄膜に垂直に磁場を印加すると，磁場が弱いうちは，磁力線は超伝導体を迂回するが，磁場が強くなると薄膜を突きぬける．迂回する磁力線のエネルギーが増加するので，超伝導体を部分的に破って磁力線を通したほうがエネルギーが低くなるためである．超伝導体を突きぬけた磁力線が “磁束量子” である．その磁束量子の磁力線を，電子の波で観察した写真が図 16.3 である．2 倍位相増幅した干渉顕微鏡像なので，量子化磁束 $\frac{h}{2e}$ が，ちょうど 1 本の干渉縞として観察できる．左の写真の下方の黒い部分が超伝導薄膜である．薄膜から離れた上のほうでは磁力線は太いが，薄膜に近づくにつれて細くなって，超伝導体に吸い込まれているように見える．

これが 1 本の “磁束量子” に対応する．超伝導体内部では磁力線は細い糸の中に押し込まれる．

この写真では，肝心な超伝導体内部の様子を見ることができない．内部は図 16.3 右の模式図のようになっているはずである．磁束量子の中心軸の近傍では超伝導が破れ，そこを磁力線が通りぬける[傍注9]．かくして超伝導領域はトポロジー的にはドーナツと同じになる．超伝導を破ると，エネルギーが損をする

［傍注 9］ 磁場は，常伝導の糸の中だけを通る訳ではない．超伝導体の内面の薄い層に，超伝導電流が流れて，内部に磁場が侵入することを阻む．その領域にも磁場が発生する．

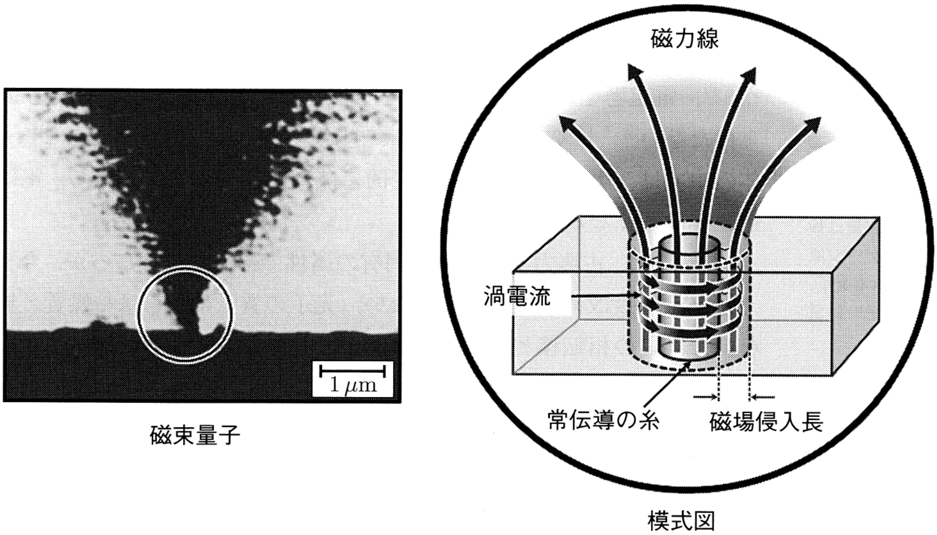


図 16.3　渦電流によって生じる磁束量子．常伝導芯の中を磁場が通りぬけるが，磁場は λ だけ超伝導体内部に浸み込む．あるいは，常伝導芯の外側の表面に超伝導電流が流れて磁束量子を作ると言ってもよい．磁場が浸み込む深さ，あるいは電流が流れる厚さが，“磁場侵入長” λ である．

ので，常伝導の体積は，できるだけ小さくしたい．このため，糸の周囲に“クーパー・ペアの波”による超伝導電流を目いっぱい流して，常伝導領域をできるだけ小さくして，そこを $\frac{h}{2e}$ の磁束を通す．

写真から測定された磁束量子の磁場の直径は 1500 Å である．常伝導の糸の直径は，およそ 500 Å．磁場は超伝導体の中に“磁場侵入長”（$\lambda = 500$ Å）だけ浸み込んでいる．

16.3 ゲージ対称性の破れを見る

電子波を使って，超伝導体に磁場をかけたときの振舞いが観察できるようになった．これは，“クーパー・ペアの波”が磁場に反応して $\boldsymbol{A}$ に比例した超伝導電流を流すことに起因する．

ここで，ゲージ理論の視点で，この超伝導の振舞いを簡単に振り返っておこう．

磁場は，通常の物質をほぼ素通りする．超伝導体であっても，臨界温度以上であれば，同じである．ところが，温度が下がって常伝導から超伝導に相転移を起こすと，劇的な変化が起こる．磁場が超伝導体内部から排除される．媒体の相転移によって，ゲージ対称性が“自発的に”破れたためである．これがマイスナー効果である．磁場をさらに強くすると，内部からすべての磁場を排除することができなくなり，細い糸状の磁力線“磁束量子”が内部に残る（図 16.3 左）．これらの様子を電子波によって観察することができるようになったのである．ここで重要なのは，“ゲージ対称性という基本法則”が破れてしまった訳ではない点である[傍注10]．それどころではない．この“対称性の自発的破れ”の概

［傍注 10］　事実，電子の集団運動（プラズマ振動）の効果を入れると，$\boldsymbol{i} = -c\boldsymbol{A}$ が形を変え対称性が回復する[1]．

念は，新しいパラダイムとして統一理論に取り入れられていく[1,2]．

そこで，“対称性の自発的破れ”を量子力学の言葉でもう少し説明しておこう[3,4]．電磁場を量子化すると，粒子性が現れて“光子”になる．光子は“質量”を持たない[傍注11]ので，電磁気力は無限遠方まで届く[傍注12]．ところが，超伝導体の中では，ゲージ対称性が自発的に破れて光子が質量を持ち，電磁気力の到達距離は短くなる．

“質量”は，古典力学では物質固有の属性であった．ところが，今や，この考え方を180度改めなければならない．光子の質量は，もはや媒質と無関係ではない．媒質の相転移と共に質量は消えたり生じたりする．媒質によって質量が作られると言っても良い．

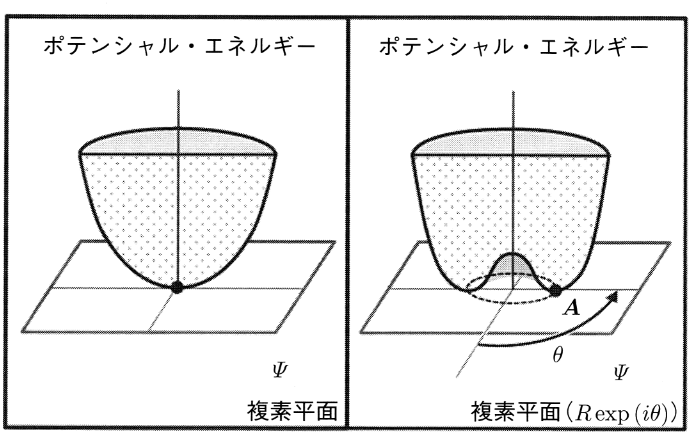
ここで，超伝導体中で光子は，“対称性の破れ”によって質量をもつようになる理由を考えておこう．この部分は，難かしいので読み飛ばしてもらっても良い．超流動でも，たくさんの原子が凝縮して“巨視的な波”を作るので，超伝導の場合と同様，この状態の波動関数 Ψ を $R\exp(i\theta)$ と書き表すことができる．そこで，両者を比較しながら一緒に考えてみよう．

[傍注11]　“光子”が，ごく小さな質量を持っているのではないかという実験が行われているが，質量は検出されていない．ゲージ原理の要請から生まれる光子，一般に“ゲージ粒子”は質量を持たない．

[傍注12]　電磁気力は，真空中では無限遠方まで届く．2点間の力の大きさは，クーロンの法則に従って $\frac{1}{r^2}$ に従って減少するので，遠方までは届かないと思うかもしれないが，そうではない．それは，点電荷からの電気力線が放射状に広がるので，r だけ離れた所で磁力線の密度が $\frac{1}{r^2}$ で減るためである．原子核を構成するクォークたちは，強い力によって原子の $\frac{1}{1000}$ 以下の小さな領域に閉じこめられる．力が強いだけでなく，力の到達距離が短いためである．あるいはゲージ粒子が大きな質量を持つためであると言っても良い．

16.4　対称性が破れる理由

温度が下がって，超伝導や超流動になると，ポテンシャル・エネルギーが変化する（図16.4）．複素数 Ψ の平面上にエネルギーを描くと，温度が T_c 以上のときには，図16.4(a)のように，平面の中心点 $\Psi=0$ で，最小値を持つ．温度が T_c 以下になると，エネルギーはワイン・ボトルの底のような恰好（かっこう）になる（図16.4(b)）．この場合の，エネルギーの最小値は，ワイン・ボトルの底の中心点 $\Psi=0$ ではなく，半径 R_0 の円上，つまり $\Psi=\Psi_0=R_0\exp(i\theta)$ に移る．このポテンシャルは軸対称なので，θ はどんな値でも良い．しかし，現実には，ある1点（$R=R_0, \theta=\theta_0$）に落ちつくことになる．例えば，図16.4(b)



(a)　(b)

図16.4　複素平面（Ψ）上でのポテンシャル・エネルギー．(a) $T>T_c$．(b) $T<T_c$．

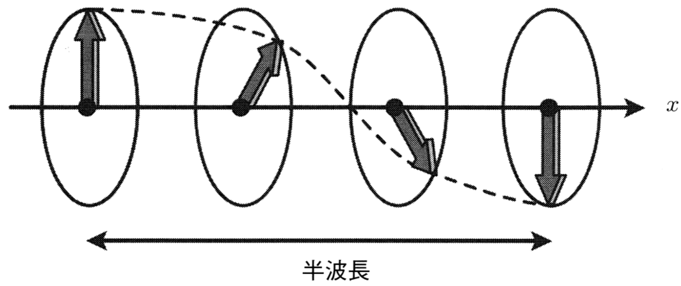


図 16.5　南部・ゴールドストーン・モードが生じる理由．対称性が自発的に破れてしまっても，矢印の向きに対する対称性が存在しているので，どの方向に矢印が向いてもエネルギーは変わらない．ゆっくり矢印の向きが変われば，ねじれのエネルギーは小さくなるので，南部・ゴールドストーン・モードのエネルギーはゼロになる．

中の A 点である．こうして，温度が T_c 以下に冷えると，θ に対する対称性が“自発的”に破れ，超伝導や超流動になることになる．対称性が破れたとき，かつて“対称性”が存在したことを示すかのように，ある“励起モード”が発生する．それは，場所と共に θ の値が変化するモードである（図 16.4(b)）．位相 θ は θ_0 になったものの，θ を自由に変化させてもエネルギーは変わらないことを示している．位相のねじれによるエネルギーの増加は，θ の変化が充分にゆっくりであれば，小さくなる．このため，波長が長くなると，このモードの励起エネルギーはゼロに近づく．つまり，この粒子の質量はゼロになる．これが“南部・ゴールドストーン・モード”である[傍注13]．対称性が自発的に破れてしまうと，隠れてしまった対称性が別の形で現れたのが，このモードであると言っても良かろう．これは，様々な場面に現れる．

［傍注 13］　南部・ゴールドストーンモードは，角度（位相）が図 16.5 のように大きくねじれたりしない．ごく小さな位相の微振動である．

磁性体の場合，温度を T_c 以下にすると，それまで熱エネルギーであちこちを向いていたスピンが一方向に揃って磁石になる．どの方向に向っても同じエネルギーになるが，たまたまある方向に磁化される．つまり，あらゆる点で一斉に θ が変化する限り，エネルギーは変わらない．これは，“大局的”対称性である．この対称性が破れて，θ が θ_0 になったときに生じる南部・ゴールドストーン・モードは，“スピン波”（マグノン）になる．超流動の場合も，θ を一定量だけ一斉に変えても，エネルギーは変わらないので，磁性体と事情は変わらない．波動関数の位相 θ が一定になると超流動になるが，“大局的ゲージ対称性”が破れると，“フォノン”が生じる．

ところが超伝導の場合，磁石や超流動とは決定的な違いが生じる．クーパー・ペアが電荷を持っているので，“大局的”ゲージ不変性は，“局所的”不変性になる．つまり，超伝導では，各点で θ を任意に変えても系に影響を与えないことになる．この場合，長波長で位相のねじれのエネルギーが小さくなる南部・ゴールドストーン・モード（図 16.5）は，局所的対称性の表現にはならない．超伝導では，電荷を持ったクーパー・ペアの波が光子と結合し，プラズマ振動（プラズモン）になる．この場合には，波長が無限に長くなっても，エネルギーはゼロにはならず，有限な値を持つ．つまり，局所的不変性が破れた超伝導体

という媒体の中では，光子が質量を得ることになる．

「この“対称性の自発的破れ”は，果たして超伝導だけを説明する考え方に過ぎないのだろうか？ あるいは，我々の宇宙全体をも支配する基本的な原理なのか？」—今，それが実験的に検証されようとしている．ゲージ原理がそのままの形で成り立っているのは，電磁気力だけである．ゲージ不変性からは，ゲージ粒子の質量がゼロになることが要請される．しかし宇宙を支配する他の力，弱い力，強い力は，原子核という極めて狭い領域でしか働かない．ゲージ粒子が質量を持たなければ説明がつかない．今，この世の中が本当に“超伝導”になっていて，それでゲージ粒子が質量を持つのかを調べるべく，CERN（ヨーロッパ原子核研究所）で実験が行われている．この実験によって，クーパー・ペアに対応する“ヒッグス粒子”が見つかれば，我々が“真空”と思っているものが，実はヒッグス粒子の凝縮体から成る“超伝導状態”であるということになる．質量のないゲージ粒子が，媒質の相転移に伴なって質量を持つと，到達距離の短かい“弱い力”や“強い力”などが誕生する．これらの力が，現在の多様な世界を形作っていることが実証される．

宇宙がビッグバン直後の高温状態のとき，ゲージ対称性が保たれ，ゲージ粒子の質量はゼロで，1種類の力しかなかった．宇宙の温度が次第に下がってくると，“常伝導”が“超伝導”へと相転移をする．このとき，ゲージ対称性が破れてゲージ粒子は質量を持ち，現在の宇宙ができ上がる．この壮大な物語が，真実か否か，CERNでの実験の結果に関心が寄せられている．

16.5 おわりに

電子波を使って，ベクトル・ポテンシャル，つまりゲージ場の姿を，捉えられるようになった．これまで理論の上だけでしか考えられなかった現象—AB効果，磁束量子化，対称性の破れなど—が，電子波の干渉パターンとして可視化され，その実例を紹介してきた．“ゲージ場ならではの現象”が映像として目のあたりに見えるようになって，ゲージ理論が直観的に肌で感じられるようになっていただければ幸いである．

なお，本記事を書くにあたって江沢洋先生（学習院大学名誉教授）と栗原進先生（早稲田大学）にご教示いただいた．

参考文献

1) 南部陽一郎：『素粒子論の発展』，江沢洋編，岩波書店（2009年3月）．とくにp.50, p.266, p.419.
2) 南部陽一郎：『クォーク』第2版，ブルーバックス（講談社，1998年）.
3) 大栗博司：“素粒子物理学の50年—「対称性の破れ」を中心に”，科学，第**79**巻，第1号（2009年）p.34–46.
4) 青木秀夫：“南部理論と物性物理学”，日本物理学会誌，第**64**巻，第2号 p.80–p.84（2009年）.

（とのむら・あきら，（株）日立製作所基礎研究所／（独）理化学研究所基幹研究所／（独）沖縄科学技術研究基盤整備機構）

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第1回 —立式で鍛える論理的思考法—

巻頭言

現象と立式

増田　久弥

1. はじめに

この連載では，自然現象，社会現象などを観測して，観測記録からその現象を律する法則—通常，数式で記述されるのだが—がどのように見出されてきたかを，様々な現象・式について20回のリレー形式で検証していく予定です．本稿においては，現象と立式の典型的な例としてニュートンの重力法則を取り上げ，その成り立ちを考えましょう．

2. 地球は丸い？ その半径は？

古くから，時や方角を知るのに星の観察は生活にとって欠かせないものでありました．星座の始まりは，紀元前3000年頃古代バビロニアの羊飼いたちの星の観察に由来すると言われております．古代ギリシャ人が当初もっていた宇宙観を見てみましょう．大地は宇宙の中心にあり平らでその上に固い丸天井があり，その丸天井の表面には，大部分の星々が固定されて貼り付けられていると考えられていました．天を大地から隔てており，太陽，月，水星，金星，火星，木星，土星は，これらの星を背景にして動いています．そして，1日(23時間56分）の間に星は丸天井のある固定点の周りを1回転回ります．あたかも，その固定点と地上の観測者を通る軸の周りに丸天井が1回転回るかのようです．丸天井が回転して，ある星が西に沈めば，他の星が東の地平線から昇るので，丸天井は星で覆われた球（天球）の半分であろうと想像されていました．天球が回転軸に取り付けられている2つの固定点は天の極（北極と南極）と言い，2つの天の極から等距離にある架空の円を天の赤道と言っていました．

ところが，紀元前5世紀初頭，次の経験上の事実から，地球は丸いと考えるようになりました．（天の）北極方向に大地を旅すればするほど，（天の）北極の高度（仰角）が高くなり，南を旅すればするほど仰角は低くなる，東に旅しても西に旅しても仰角は変わらないことがわかってきました．

大地が平面であれば，その現象は説明できないが球と考えれば説明がつくため，古代ギリシャ人は大地（地球）も球であると思うようになったわけです．では，球であるとすれば，地球の半径は何でしょうか？ 当時ギリシャの天文学者が半径を求めた方法を説明しましょう；図1においてOを地球の中心，A, Bを同じ子午線上の点，天の北極NとO, A, Bを結ぶ直線をそれぞれ L, L_A, L_B とする．またこの円のA, Bにおける接線（地平線）と L との交点を A', B' とする．このときA, Bにおける天の極に対する仰角を α, β とする．L

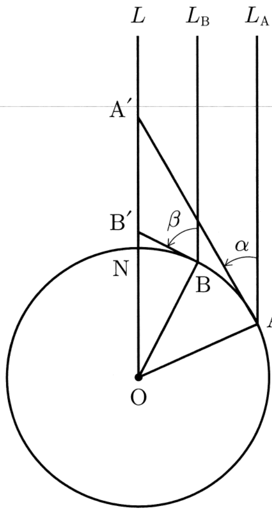


図 1　天の北極に対する仰角の変化.

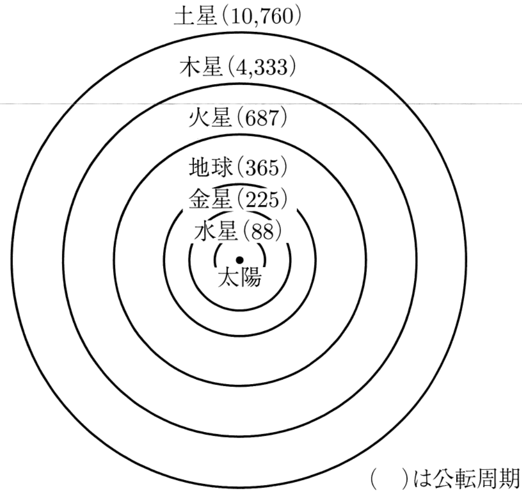


図 2　太陽中心モデル.

と L_{A} は平行，三角形 AOA′ は直角三角形より，$\angle \mathrm{A'OA} = 90^\circ - \alpha$．同様に $\angle \mathrm{B'OB} = 90^\circ - \beta$．よって $\angle \mathrm{BOA} = \alpha - \beta$．したがって弧 AB の長さ $= \overline{\mathrm{AO}}\left(\frac{2\pi(\alpha-\beta)}{360^\circ}\right)$．

この公式を用いて，弧 AB の長さを測ることによって地球の半径 $\overline{\mathrm{AO}}$ の値が幾つか求められましたが，中でも，エラトステネス（273–194 B.C.）の求めた値が名高いものです．それは，今日知られている半径の値 6378 km との誤差が約 1%であります．

3. アリスタルコスの夢：月の大きさと距離は？

地球が丸いとなると，次に太陽などが丸い地球を中心に回っているというモデルが当時一般的に受け入れられていました．その中で天文学者アリスタルコス（310–230 B.C.）は「太陽の周りを地球が回っている」という惑星系に対する太陽中心モデル（A モデル）を提示しました．これに関する彼の著書は紛失されてしまい，わずかにアルキメデスの著書の中で引用されていることから推測されるだけです．すなわち中心が太陽でその周りを惑星が図 2 のごとく円軌道を描き公転周期の順にその半径は大きくなっている．地球の公転周期は 365 日であるから“調和”の観点からいって，図 2 の位置に地球はいなければならない．ゆえに地球は太陽の惑星であるということになります．

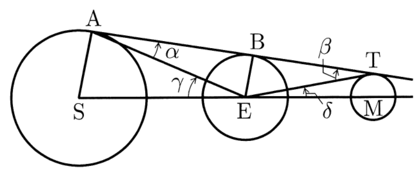


図 3　太陽・地球・月の半径と距離.

さらに大胆に推測すれば，「各惑星が太陽を中心とする円軌道を描くとすると各惑星の半径 R（＝惑星と太陽との距離），公転周期 T は $\frac{\left(\frac{R}{R_{\mathrm{E}}}\right)^3}{\left(\frac{T}{T_{\mathrm{E}}}\right)^2}$ の値 c は常に 1 という関係式を満たす」ことを著書でアリスタルコスは仮定したのではないかと推測します．ここで $T_{\mathrm{E}}, R_{\mathrm{E}}$ を地球の公転周期と太陽との距離．$T, T_{\mathrm{E}}, R_{\mathrm{E}}$ は観測可能な値であるので，この公式より R が求められます．土星，木星，火星，金星，水星の現在知られている R の値を用いて計算するとそれぞれ，c の値は，0.9999, 0.9995, 1.0014, 1.0025, 1.0028 となり 1 に近いです．アリスタルコスは現存する唯一の著書[3)]で地球の惑星である月と地球の距離の導出する方法を考案しました：「月の半径は月と地球の中心の間の距離の約 $\frac{1}{60}$ である」ことを導いております．その証明の概要を紹介します．図 3 において S, E, M は太陽，地球，月の中心とし $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を図の通りとする．

このときアリスタルコスは δ を月食の平均継続時間と一月の長さから求める巧妙な方法を見出しました．$\alpha+\beta+\angle\mathrm{AET}=180^\circ=\gamma+\delta+\angle\mathrm{AET}$ であるから $\alpha+\beta=\gamma+\delta$．$\delta$ は測定可能で計算できる．また γ は太陽の角半径であるから，測定可能である．よって $\gamma+\delta$ は測定可能であって観測結果から $\gamma+\delta\approx\frac{1}{60}$．よって $\alpha+\beta\approx\frac{1}{60}$．しかし α, β は小さいので，$\alpha\approx\sin\alpha=\frac{\overline{\mathrm{EB}}}{\overline{\mathrm{ES}}}$, $\beta\approx\sin\beta=\frac{\overline{\mathrm{EB}}}{\overline{\mathrm{ET}}}$．よって $\alpha+\beta\approx\frac{\overline{\mathrm{EB}}}{\overline{\mathrm{ES}}}+\frac{\overline{\mathrm{EB}}}{\overline{\mathrm{ET}}}$．また $\overline{\mathrm{ES}}$ は $\overline{\mathrm{ET}}$ より十分大であるから，$\alpha+\beta\approx\frac{\overline{\mathrm{EB}}}{\overline{\mathrm{ET}}}$．これより $\overline{\mathrm{EB}}\approx\frac{\overline{\mathrm{ET}}}{60}$．

現在の観測値を用いて計算しますと，$\overline{\mathrm{EB}}=\frac{\overline{\mathrm{ET}}}{59.58\cdots}$ です．この著作からアリスタルコスの惑星系モデルにおいて，5惑星の軌道半径を，地球と太陽の距離を単位として，導出することが可能であったであろうことが推測されます．したがって失われた著書には多分この部分の計算が詳述され，宇宙の幾何モデルの構築という遠大な夢が“実現”されていたのかもしれません．古代ギリシャ時代以後科学は停滞し再び復活するのはルネッサンスであります．

4. コペルニクスとケプラー：アリスタルコスの復活

天文学は2世紀にクラクディオス・プトレマイオスが体系化した天動説が16世紀まで支配的でしたが，1年の長さがその当時使用していた（ユリウス）暦の1年よりもわずかに短く，暦の季節と実際の季節にずれが生じてきていました．プトレマイオスの体系では1年が何日かを決めるには，数百年観測しなければなりませんでした．1年の正確な長さを知ろうとしたコペルニクス（1473–1543）は，その惑星のモデルとして，すでに知っていたAモデルに注目しその再建・再構築を試みました．太陽を中心におきその周りを1回公転する時間を1年と定めて，1回帰年（1年の基準を太陽にとる）を365.2425日と計算しました．コペルニクスは著書[4)]を1543年に刊行しその中で地動説での測定方法や計算方法，各惑星の公転半径を測定し計算

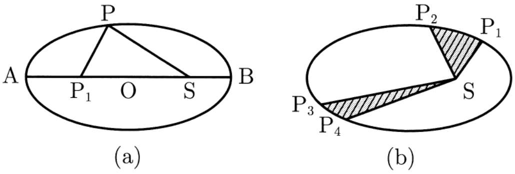


図4　(a) 惑星Pの楕円軌道．(b) 惑星と太陽を結ぶ線分の掃く面積．

し直せる方法を示しました．Aモデルには，$\frac{R^3}{T^2}$ が定数という“すばらしい釣り合いと調和の絆”がありました．

ティコ・ブラーエ（1546–1601）は1572年，カシオペア座に超新星（ティコの新星）を肉眼で確認できなくなるまでの14カ月の観察記録を残し，当時の国王の支援を得て天文台を建設し大量の精密な観測データを記録しました．中でも1577年に出現した彗星についての観測記録は天動説では説明つかないものでした．ブラーエによってなされた金星の桁外れに完全で精確な観測記録は，1601年にブラーエの助手のケプラー（1571–1630）に渡されその解析が委ねられました．ケプラーは精緻な観測記録を表現する幾何モデルの建設にとりかかり1607年に解析を済み1609年に発表しました．

ケプラーの第一法則：*各惑星の軌道は太陽が一つの焦点を占める楕円である*（図4 (a)）．

ケプラーの第二法則（面積法則）：*惑星と太陽を結ぶ線分が一定時間に掃く面積は一定である*（図4 (b)）．

その後1618年，第三法則がさらに見つけられた：

ケプラーの第三法則：*惑星が太陽の周りを一回転する時間（周期）の2乗は，その軌道の半長径の3乗に比例する*．

これらは“アリスタルコスの仮定”における惑星の軌道は円を楕円に修正したものと見なせます．楕円軌道を考えるにいたった経緯は割愛します．ケプラーが火星の軌道を研究している間にガリレオは自身で製作した新しい望遠鏡で木星の4個の明るい衛星を発見しました．ケプラーは，木星と

この4個の衛星の間にも太陽とその惑星との間にある上の3つの法則がやはり成立することを確かめることができました．

5. ガリレオの運動論

ガリレオ（1564–1642）は，地表の近くにおける物体の運動を理想化した状態の下で研究しました；理想化した状態とは，空気の抵抗，摩擦などがない状態のことです．ガリレオの運動論は4つの公理に基づきます．これらを一つ一つみていきましょう．

第一公理（慣性の法則） *自由な水平運動は速さも方向も一定である．*

これは経験から推察されますが，決して経験の一般化ではありません．実際，経験では，「水平面上を自由に動く物体は遅くなってついには停止してしまう」ということになるでしょう．そうではなくて決して現実には観測されず，観測されるはずのない運動にガリレオは言及したのであります．自由水平運動を経験からではなく，次のような思考実験によって上の公理をガリレオは導きました．斜面を摩擦なしに滑り降りる物体を考えてみましょう．斜面の（水平面に対する）角度がどんなに小さくても，物体が下るにつれて物体の速度が増し，他方斜面を滑り上がる物体の場合は傾きがどんなに小さくても昇り上がる物体の速度は遅くなることは明らかでしょう．ですから対称性から，完全に水平な面を滑る物体においては，その速度は増加も減少もしないし，また方向も変わりません．ガリレオは「物理法則というのは，経験の一般化というより，完全な三角形などは実在しないがそれらの図形の性質を扱う幾何学の諸定理のようなものだ」ということをアルキメデスから学んでいました．さらにガリレオは摩擦や空気抵抗などを単に無視したのではありません．そのような効果が無視できることが論証できるような実験をも工夫したのであります．次に自由に落下する物体の運動に対するガリレオの考察を述べましょう．

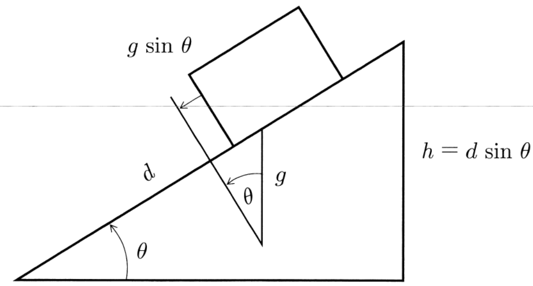


図5 斜面上を滑る物体.

第二公理（自由落下の法則） *自由に落下する物体は，一様に加速される．*

この公理が正しいと仮定しましょう．これを式で表しますと $\Delta v = g\Delta t$ です．ここで時間 Δt の間に増した速度 v の変化を Δv，加速度を定数 g で表しております．任意に与えた時刻 t_0 における速度を v_0 とすると，$v = g(t-t_0) + v_0$．これより t_0 から t の間に物体が進む距離 d は，$d = \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + v_0(t-t_0)$ が出ます：私たちは積分を知っているのでこの式の導出は簡単ですが，アルキメデスの求積法からも求められます[9]．特に静止している物体が落下する場合，上式で $v_0 = 0$ とおくと，$v = g(t-t_0)$ であるので次の2つの式を得ます：

$$d = \frac{1}{2}g(t-t_0)^2, \quad v^2 = 2gd. \tag{1}$$

この公理の妥当性についてガリレオは高い塔の上から様々な物体を落として確かめています．ただ当時は秒単位で計れる時計がなかったので，ガリレオは長い距離と短い時間を測定するという実用上のことから，次の公理を用いました：

第三公理 *斜面上を摩擦なしに滑り下りる物体は一様な加速度 $g\sin\theta$ を受ける．g は自由落下の加速度で，θ は斜面が水平となす角である．*

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ の場合はそれぞれ慣性の法則，自由落下の法則に対応しております．第2公理より $v^2 = 2(g\sin\theta)d = 2g(d\sin\theta) = 2gh$ であるから，摩擦のない斜面を初め静止の状態から滑下する物体の最終速度が落下距離に依存するだけで，傾きの角度に依らないことがわかります．さらに，当時は物体の速度を計測するのが困難でありまし

たが，斜面を摩擦なしに滑り上がらせて静止した高さを測ることにより公式 $v^2 = 2fh$ を適用して速度を計ることができるようになりました．

第四公理は*相対運動と放物体の運動法則*に関する公理です．例で説明しましょう．「帆船の垂直なマストから錘が落下するとする．甲板の何処を打つか？」ガリレオは「岸から見る観測者にとって帆船の役割は，錘に水平な初速度（船の速度）を与えるだけである．したがって，真空中なら定速，定方向で船が動くかぎり，錘は常に放出点の真下の甲板を打つであろう」と答えています．読者の皆さん，考えてみませんか？

6. 人は遠心力で地球から飛ばされる？

ガリレオの著書[6)]の中で天動説の代弁者シムプリチオに「もし地球が回っているとすれば，回転で地上の人は（つなぎとめるひもがないから）放り出されるのではないか」と質問させています．石をひもの端で結び他端を振り回すと，ひもは伸びようとし，ひもが切れると石がその瞬間の石の軌跡の接線方向に一定の速度で飛び去っていくことはわかっていました．ここではガリレオの代わりにホイヘンス（1629–1695）の反論を見ましょう；図 6 (a) で円 AB′C′ は地球の赤道（半径 r）を表し，A, B′, C′ は地球の回転（一定の速度 v）によって運ばれる観測者と石の等時間間隔（$= t$）での位置とする．もし石と観測者が A にきたときに石の重力が突然消滅したならば，ガリレオの第一法則より石は一定の速度 v で接線 ABC に沿って進むであろう．

B は B′ と地球の中心を結ぶ直線と接線との交点である．C も同様である．最初観測者は石が速度 0 で A にいることを観察する．観測者の観測結果は図 6 (b) の通りである．図 6 (b) で，最初石は A で静止している．観測者が B′（また C′）にきたときは石は頭上 $\overline{\mathrm{B'B}}$（$\overline{\mathrm{C'C}}$）の高さにいる．その点がそれぞれ B, C である．観測者の頭上をどんどん離れていく石の加速度を求めてみる．ガリレオの第二法則より，距離 $\overline{\mathrm{B'B}}$ は図 6 (b) において A, B を通過する経過時間の 2 乗に比例する．通過経過時間は弧 AB′ の長さに比例するので

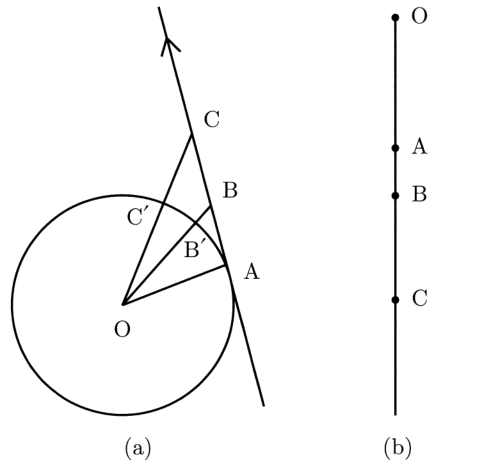


図 6　(a) 石に作用する重力が A において消滅したときの石の軌跡．(b) 地上の固定点での観測者が見た石の軌跡．

$$\frac{\overline{\mathrm{C'C}}}{\overline{\mathrm{B'B}}} = \frac{(\text{弧 AC}' \text{ の弧長})^2}{(\text{弧 AB}' \text{ の弧長})^2}.$$

図 6 (b) において飛んでいく石の加速度を g とすれば，(1) より，$d \equiv \overline{\mathrm{B'B}} = \frac{1}{2}gt^2$ であり，弧 AB′ の長さ $= tv$ であるから，

$$g = \frac{2d}{t^2} = \frac{Dv^2}{r}. \tag{2}$$

ここで $D \equiv \frac{2r\overline{\mathrm{BB'}}}{(\text{弧 AB}'\text{の弧長})^2}$．$\overline{\mathrm{B'B}}$，弧 AB′ の弧長はともに r に比例するので，D は r に依らない．また簡単な初等幾何的考察より，$t \to 0$ のとき $\angle \mathrm{AOB'} \to 0$ となり，このとき $D \to 1$ が示される g, r, v は t に依らないから，(2) で $t \to 0$ とすれば，$g = \frac{v^2}{r}$ を得る．鉛直線の張力が吊るされた物体の質量に比例するのと同様に考えて速度 v で回転する物体を繋ぎ止める（長さ r の）ひもの引っ張る力（遠心力）も物体の質量 m に比例するであろうと類推し，遠心力 F の公式：$F = \frac{mv^2}{r}$ が成立するとホイヘンスは推論しました．さてシンプリチオの質問に戻りましょう．遠心力加速度 g と重力加速度 g_{E} との比を求めてみます．$g_{\mathrm{E}} = 980\,\mathrm{cm/s^2}$ であることが測定によってわかっています．g を見るために $v = 2\pi\frac{r}{T}$ において $r = 6.38 \times 10^8\,\mathrm{cm}$,

$T = 1$ 日の秒数 $= 8.64 \times 10^4\,\mathrm{s}$. を用いると，$v = 4.64 \times 10^4\,\mathrm{cm/s}$.. これらの値を $g = \frac{v^2}{r}$ に代入すれば $\frac{g_\mathrm{E}}{g} = 290 = 17^2 > 1$. このとき $g_\mathrm{E} > g$ ですので石が飛び去ることはない，とホイヘンスは断じています．もし地球の周期が $\frac{24}{17}$ 以上であれば，飛び去るでありましょう．

7. 立式：ニュートンの重力法則（逆二乗の法則）

月はどうして地球の周りを回ることができるのでしょうか．地球の表面の近くですべての物体は，その質量，成分，形あるいは大きさに関わりなく同じ重力加速度を受けることをガリレオは実験で具体的に示したことを述べましたが，ニュートン（1642–1727）は地球が月に及ぼす力は地上での力と同じであると考え，ガリレオの法則が月にも適用されると仮定しました．地球から月までの距離 r_M における重力加速度を g_M とすると，ホイヘンスの公式から

$$g_\mathrm{M} = \frac{v_\mathrm{M}^2}{r_\mathrm{M}} = \frac{4\pi^2 r_\mathrm{M}}{T_\mathrm{M}^2}. \qquad (3)$$

ここで T_M は月の公転周期．この加速度を地球表面の重力加速度 g_E と比べてみましょう．上の公式と同様にして，地表すれすれに周期 $\frac{24}{17}$ 時間で飛んでいる衛星を考えてみます．

$r_\mathrm{E}, T_\mathrm{M}$ を地球の半径，衛星の公転周期とすると

$$g_\mathrm{E} = \frac{4\pi^2 r_\mathrm{E}}{T_\mathrm{E}^2}$$

を得ます．ゆえに，

$$\frac{g_\mathrm{E}}{g_\mathrm{M}} = \frac{r_\mathrm{E}}{r_\mathrm{M}} \left(\frac{T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{E}}\right)^2. \qquad (4)$$

アリスタルコスの結果より月までの距離 r_M は地球の半径の約 60 倍であり月の公転周期は 27.3 日であるから，地球の表面すれすれに飛ぶ物体は $\frac{24}{17}$ 時間の周期をもつから，

$$\frac{g_\mathrm{E}}{g_\mathrm{M}} = 60^{-1} \times (17 \times 27.3)^2 \approx 3590 \approx \left(\frac{r_\mathrm{M}}{r_\mathrm{E}}\right)^2.$$

これは地球半径の 60 倍の距離における重力加速度が，地球の表面における重力加速度より約 60^2 倍小さいことを示していて，$g_\mathrm{M} \propto r_\mathrm{M}^{-2}$ が成立することを示唆しています．

同じ方法で太陽に向う惑星の表面における加速度を比較できる．任意の惑星をとってきて太陽から距離 r にある惑星の重力加速度を g とすると，地球と任意の惑星に対しても (5) すなわち

$$\frac{g_\mathrm{SE}}{g} = (r_\mathrm{SE} r) \left(\frac{T}{T_\mathrm{SE}}\right)^2 \qquad (5)$$

が成立する．ここで $g_\mathrm{SE}, T_\mathrm{SE}, r_\mathrm{SE}$ はそれぞれ太陽が地球に及ぼす重力加速度，地球の公転周期，太陽と地球の距離である．惑星の運動に関するケプラーの法則より $\left(\frac{T}{T_\mathrm{SE}}\right)^2 = \left(\frac{r}{r_\mathrm{SE}}\right)^3$ が成立するから，これを (5) に代入することにより

$$\frac{g_\mathrm{SE}}{g} = \left(\frac{r_\mathrm{SE}}{r}\right)^2$$

が任意の惑星に対しても成立することがわかります．よって太陽に向かう惑星の重力加速度は太陽からの距離の 2 乗に反比例します．ニュートンは次の定理を示しました：もし一つの焦点を太陽が占める楕円が惑星の軌道であって，その惑星がケプラーの面積法則に従うならば，太陽の引力は距離の 2 乗に反比例して変わる．逆に惑星に対する太陽の引力が距離の 2 乗に反比例して変わるならば，その惑星の軌道は太陽を焦点とする楕円であってケプラーの面積法則をみたす．

8. ニュートンの重力法則の確認：潮の干満

潮の干満は月の引力によって起こることは知られていましたが，そうであれば月と面している側の海面が引っ張られるわけですから，満潮は 1 日 1 回しかないはずであります．ところが，「実際は 2 回あるのはなぜか」と議論になりました．ニュートンは重力の法則から明確に証明しました．これは，重力法則の正当性を強くサポートするものでありました．

また，観測がより正確になり，「4 個の衛星が木星の周りを運行する様子を長時間にわたって精密

に観測し，ニュートンの法則が正しく成立しているかどうか」確認をしようとしました．衛星の運行をニュートンの法則によって計算し，観測と付き合わせたところ，衛星が，あるときは予測時間よりも約８分早く（遅く）現れたり，約８分遅く（早く）現れることがわかりました．それも早く（また遅く）現れるのは地球に近い（遠い）ときであることがわかりました．それで重力の法則は成り立つかが問題となりましたが，O. レーマー（1644–1710）は光は有限の速度をもっているのではないかと考えました．そうすれば，光が木星の衛星を出て，地球に到達までにはある時間がかかるでしょう．そのために私たちが衛星を見たときに，見た瞬間の衛星の姿を見ているのではなくて，光が到達する時間だけ遡った時間の衛星がいた位置を見ているので，その結果衛星が計算上遠くにあれば，光が届く時間が長いので，早く現れる，近くにあれば，遅く現れるとレーマーは説明をしました．観測結果にはその時間差を考慮して決めなければなりません．そしてレーマーは光の速度を決めました．

最後に執筆にあたって次の２冊：R.P. ファインマン[1)]とD. Layzer[2)]から様々な示唆を受けました．感謝いたします．

参考文献

1) R.P. Feynman,『物理法則はいかにして発見されたか』邦訳：江沢洋，ダイヤモンド社 (1968).
2) D. Layer,『宇宙—人は宇宙をどう考えてきたか』邦訳：堀源一郎，東京化学同人 (1992).
3) S. Aristarcus『太陽と月の大きさと距離について』邦訳：種山恭子，世界の名著９「ギリシャの科学」中央公論社 (1972).
4) N. Copernicus,『天体の回転について』邦訳（6巻の1巻のみ）：矢島裕利（岩波文庫），岩波書店 (1953).
5) G. Galileo,『新力学対話』(1638), 邦訳：今野武雄・日田節二郎（岩波文庫），岩波書店 (1949).
6) G. Galileo,『天文対話』(1632), 邦訳：青木靖二（岩波文庫），岩波書店 (1959).
7) G. Galileo,『星界の報告他１篇』邦訳：山田慶児・谷泰（岩波文庫），岩波書店 (1976).
8) I. Newton,『自然哲学の数学的諸原理』邦訳：河辺六男，世界の名著31「ニュートン」，中央公論社 (1979).
9) 高木貞治，『解析概論』岩波書店（改定第３版 1983），86p.
10) S. Chandrasekhar,『プリンキピア講義』（中村編）講談社 (1998).

（ますだ・きゅうや，東京大学・東北大学名誉教授）

好評発売中 !!

SGC Books

新版 物理数学ノート 基礎物理をよりよく理解するために	佐藤 光 著	A5判	本体 1900円
新版 演習 場の量子論 基礎から学びたい人のために	柏 太郎 著	A5判	本体 1850円
新版 シュレーディンガー方程式 量子力学のよりよい理解のために	仲 滋文 著	A5判	本体 1800円
新版 マクスウェル方程式 電磁気学のよりよい理解のために	北野正雄 著	A5判	本体 2000円

表示価格は税抜きです

［サイエンス社］



物理の道しるべ
～研究者の道とは何か～

第14回

様々な出会いを通して学ぶ

佐々木　節

1. はじめに

編集部から「物理の道しるべ」という研究者のリレーによる連載を考えているが，そのうちの一つを引き受けてもらえないか，という話を頂いたとき，まあ何とかなるだろうと気軽に引き受けてしまって，実は今，少々後悔している．これまでの連載記事を読むと，錚々たる方々による，感銘深い記事ばかりである．それに比べて，わが身はというと，中学生か高校生の頃に，何となく物理に対する憧れのようなものはあったと記憶している（というより，そうであったと思い込んでいる）が，研究者を目指すきっかけになるような出来事があったのか，と問われると，そのような鮮明な記憶がないのである．そういうわけで，以下では，私の若い頃の経験を少々羅列的に述べることにする．この凡長な小文が，これから研究者を目指す諸君にどれだけの意味を持つのか，はなはだ疑問である．あえて意味を見つければ，私のような中途半端な人間でも，それなりにチャンスをつかむ努力をすれば研究者への道が開けるというメッセージにはなるかもしれない．

2. 京大理学部での出会い

高校時代に，一つだけはっきり覚えているのは，京都大学理学部に入りたいという希望を比較的強く持っていたことである．私は入学が1972年度という，湯川秀樹先生がちょうど退官された直後の入学であり，その意味では「遅れてきた年代」であるが，やはり京大理学部＝湯川秀樹のイメージは強烈であった．また，1965年の朝永振一郎先生のノーベル賞受賞のニュースは，すでに中学生になっていた私にとっては，強く印象に残っている．それも京大理学部を目指すきっかけにはなったかもしれない．

しかし，何と言っても一番大きな影響を及ぼしたのは，中学，高校と2回の修学旅行で訪れたときに感じた「京都」の持つ歴史の重みや文化的雰囲気の心地よさであった．加えて，実に「現実的」な理由として，当時の京大の数学と物理の入試問題が，なぜか肌にあっており，他大学の過去問は解けなくても，京大の過去問は比較的すらすら解けたということがあった．このことが，自分には京大しかない，という思い込みをさらに強くしたことは確かである．

大学に入学した時期は，すでに全国の大学紛争が下火になりつつあったが，京大教養部ではC共闘という比較的ラディカルな連中の勢力がまだまだ強く，授業はあっても期末試験は潰される，というパターンがしばらく続いていた．そうすると大

抵の科目は試験の代わりにレポート提出で単位が取れることになる．私はそれをよいことに，必要最小限の授業にだけ出て，あとは遊び呆けて，気が向いたときだけ勉強する，という自堕落な暮らしをしていた．

しかし，そうした中で，私にとっていくつかの貴重な出会いがあった．一つは，クラス仲間のＳ君との出会いである．大学紛争にも関わらず，というか，ひょっとすると大学紛争のおかげなのかもしれないが，同じ授業を受けていた同学年の連中は仲間意識が強く，和気藹々としていた．中でもＳ君とは非常に気があって，話がし易かっただけでなく，何にでも誠意を持って答えてくれた．そして（ひょっとすると彼には迷惑だったかもしれないが），数学や物理で分からないことがある度に彼の下宿に押しかけて，何やかやと教えてもらった．有名なディラックの量子力学の教科書も，彼がその存在を知っていて，その本を一緒に勉強しないか，と誘ってくれた記憶がある．早速購入して読み始めたが，さすがにこればかりは，当時まだ学部一回生だった私たちには少々難しすぎたが，それでも分からないなりに量子力学の深淵に触れた気分になり，理論物理への憧れがより強くなった．

もう一つの出会いは，当時，有志の教官や学生が中心となって行っていた自主ゼミである．当時教養部におられた数学の藤家龍雄先生が，解析学の自主ゼミを主宰するという掲示があり，数学に少なからず興味を持っていた私は，勇んで先生の研究室を訪れた．このゼミに参加した学生は，私を含めて確か３名という小ぢんまりとしたものだったと記憶している．ゼミは英語の教科書を輪読するというものであった．そういうわけで，元々の内容の難しさに加えて，英語で定義や証明を理解しなければならないという困難が加わって，私にはほぼ全く理解できなかった．しかし，藤家先生はそれにも関わらず，辛抱強く我々を見守ってくださり，さらに，私の進路についての相談にも，いつも快くのって下さった．加えて，先生の研究室に直接出入りして学問的雰囲気に直接触れることができたことは，私の研究者への憧れをさらに強いものにした．

先ほど触れたように，当時の京大教養部には学生運動の余波が色濃く残っており，まだまだ正常に授業や試験が行われる状況には程遠かった．しかし，理学部キャンパスの方は比較的落ち着いていた．さて，その当時の京大理学部では，3, 4 回生向けの理学部専門科目を１回生から履修することができるだけでなく，講義の時間帯が重複していても何の問題もなく単位の取得が可能であった．しかも，単位認定は，学生が各講義の担当教官から成績を記入した「履修カード」をもらい，それを各自が自分の履修記録表に貼り付けたものを教務掛に提出する，というシステムであった．すなわち，万一単位を落としてもその落第記録は残らないわけである．あるいは「可」の成績がついた科目は，翌年度に再度履修して「良」や「優」などのよりよい成績を取れたら，「可」の履修カードを捨ててよりよい成績を記録に残す，という裏技（？）も可能であった．つまり，授業が難しくて単位を落とすのではないか，という不安をあまり感じることなく，安心して履修ができたわけである．そこで，さすがに１回生からの履修はしなかったが，２回生になると，背伸びをして専門科目をいくつも履修したものである．

現在は，コンピュータによって履修が管理される時代になっており，このようなことはもう不可能なのかもしれないが，思い起こすとこの当時のシステムは，私のようなグータラで，しかし学問に対する憧れだけは強い学生にとっては，真にありがたかった．失敗を恐れずに，面白そうと思った科目はすべてまずは履修してみる，ということが可能だったからである．

3. 物理の包容力と奥深さ

３回生になると，学生は自分の進みたい専門の学科が用意した実験なり演習なりを選んで，本格的にそれぞれの専門分野の学習をするシステムになっていた．私は，数学をやってみたい気持ちもあり，前期は欲張って物理学科と数学科の両方の科目を選んだ．しかし，レポートや試験などを通

して，次第に私には数学的才能，特に論理に対する厳密性という最も重要な部分が欠けていることが明らかになって，数学へ進むことはあきらめた．一方，物理も，例によって憧れだけで，ほとんどまともな勉強をしていなかったため，ゼミでもほとんど落ちこぼれ状態であった．しかし，幸いにも物理には学生がそれぞれの分からないところやできないところは，互いに補い合って共同作業で一つの目標に進む，という文化があり，それが私を救ってくれた．

話は少々逸れるが，私は，現在理論物理を専門として研究を行っている．そのため共同作業が必須であるわけではないが，私も含めて，最近の理論物理分野での研究は，そのほとんどが共同研究である．そして，そうした共同研究では，学部時代に経験したように，日常的な議論やゼミを通して，お互いの欠点を補い合い，お互いの長所を上手に生かすことができたときに，非常に優れた成果が得られるものである．この共同作業的文化が，物理学の中で，どのように広まったかは，科学史として面白い課題かもしれない．

閑話休題．こうして，私は同級生仲間のおかげで何とか落ちこぼれずに4回生になった．4回生では各自がそれぞれの好きなテーマに関する卒業研究を行うことになる．京大物理では，これを課題研究といって，通常，実験系と理論系の研究室が協力して一つの課題研究を担当していた．しかし当時は，林忠四郎先生が主宰する天体核研究室だけは，唯一単独で理論だけの課題研究を担っていた．その課題研究では，前期にランダウ・リフシッツの『場の古典論』の後半部分，すなわち一般相対論の部分を輪読し，後期は，学生各自がそれぞれ異なるテーマを選んで卒業研究を行い，最後に研究発表会を行う，というやり方をしていた．天体核研究室では，太陽系の起源，恒星の進化，高エネルギー天体，一般相対論，宇宙論と実に幅広い研究が行われており，宇宙に関するテーマであれば，どんなものにでも対応できる，という雰囲気であった（ちなみに，この分野の幅広さは現在の天体核研究室でもほとんど変わっていない）．私は，一般相対論に興味を持っていたが，自分ではまともに勉強したことがなかったので，前期の輪読ゼミは，一般相対論を勉強する願ってもない機会となった．この輪読ゼミで，私は，物理の奥深さに少し触れることができたように思う．それはひとえに，当時の天体核研究室の助手として，この輪読ゼミのチューターをして頂いた中澤清さんのおかげである（当時も現在も，京大物理では，教官もさん付けで呼ぶのが習慣で，そういう意味では学生は相当に偉そうな顔をしていた．そこで，ここでもその雰囲気を伝えるために，あえてさん付けで呼ぶ．ちなみに，少なくとも我々の年代が「先生」と呼ぶのは，湯川秀樹先生と林忠四郎先生くらいであった）．

一般相対論は時空を幾何学的に取り扱う，という意味で，非常に数学的であり，その正確な理解には，微分幾何学の知識が不可欠である．しかし，これは一般相対論が数学の一部であることを意味はしない．微分幾何学ももちろん重要であるが，その完璧な知識がなくとも，しっかりとした物理的考察の訓練さえ積めば，生半可な数学的理解よりはるかにしっかりと一般相対論を理解できるのである．その際，特に重要となるのが，いわゆる次元解析である．輪読会で我々学生がどうしても分からない問題に直面して立ち止まってしまう度に，中澤さんは次元解析を使って，実に見事に問題を解決してしまうのである．これは私には最初は手品のように思えた．しかし，それにも関わらず，当時の私には，まだ次元解析の真の重要性が分かっていなかった．それに気づくのは，大学院に入ってからである．

さて，4回生には，卒業研究以外にもう一つ大きな試練が待っていた．それは大学院入試である．私は，それまでの勉強不足が祟って，院入試に向けて勉強すべきことが多すぎて，何から手をつけたらよいのか，全く分からない状態で4回生を迎えていた．そのような私に対して，色々と助言をしてくれたり，一緒に勉強に付き合ったりしてくれたのは，やはり同級の仲間であった．中でも，前出のS君ともう一人の同級生A君に負うところが

大であった．A 君は物理を非常によく理解していて，当時，同級生の中で最もよくできる学生と評判であった．その A 君が，私のナイーブな質問に的確に答えてくれるだけでなく，私の足りないところを補うために何をしたらよいか，ということまで親身になって懇切丁寧に教えてくれた．そのおかげで，最も効率のよい受験勉強ができたのである．そして S 君は，夏休みに一緒に勉強合宿をしようと彼の実家に誘ってくれた．これは本当にありがたかった．よく言われることだが，京都の夏は暑い．単に暑いだけでなくサウナの中のように蒸し暑いのである．しかも下宿には冷房などという贅沢なものはない時代である．一人でいるとどうしても勉強の能率が上がらない．それが S 君のおかげで，蒸し暑さから逃れられただけでなく，一緒に何やかやと教え合いながら受験勉強を楽しむことができた．そして運よく合格し，希望の天体核研究室に入ることができた．

4. 天体核研究室での出会い

さて，物理第二専攻では，大学院に入学すると，すべての研究室の院生がすぐに各研究室に分かれるのではなく，M1（修士 1 年生）の間は同じ大部屋，通称タコ部屋に入り，一緒に過ごすことになっていた．そして研究室の専門分野のみに偏ることなく，できるだけ多様な講義やゼミを履修することを勧められた．これをジェネラル・エデュケーションと言い，特に林先生はその重要性を強調しておられた．

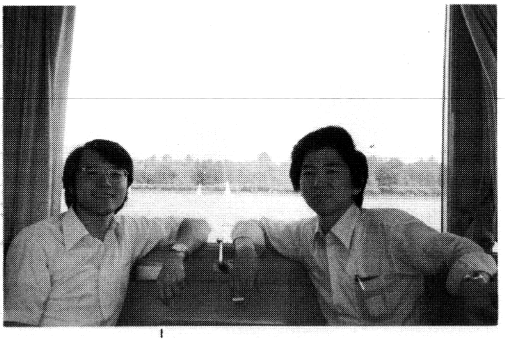
ちなみに，大学院入試の合格発表直後に，喜び勇んで林先生の部屋に伺い，入学までの半年間，何を勉強したらよいでしょうか，とお尋ねしたところ「君はランダウ・リフシッツを全部読んだのか？読んでいないなら，それから勉強せよ」と言われた記憶がある．ここで言うランダウ・リフシッツとは，力学，電磁気学，量子力学，統計力学，場の古典論，流体力学と，理論物理の基礎科目のほぼすべてを含んだ教科書のシリーズのことで，その独特の物理的考察に基づいた記述は，今読んでも全く古さを感じさせず，真に示唆に富んだ，不朽



リフシッツ（右）と筆者（1979 年，イタリア，トリエステでの第 2 回マーセル・グロスマン会議にて）．

の名教科書シリーズである．当時の私は，そのシリーズを一通り揃えて持ってはいたが，例によってほぼ積読状態であった．そこで，がんばって流体力学と統計力学の読破に挑戦した．もちろん，これは途中で挫折することになるが，しかし，少なくとも，どんな内容のことがどこに書いてあるか，ということが，ある程度頭に入った．これはその後の研究生活において大いに役に立った．何か新しいことや分からないことに直面したとき，「そういえば似たようなことが，あそこに書いてあったはずだ」という記憶を元に，教科書を開いて改めて勉強すると，問題が解決したり，新たな視点が見えてきたりしたからである．特に，既存の分野を超えて何か新しい対象を考えたり，新しい方法論を見つけようとする際には，物理の基礎を幅広く「知っている」だけでも大きな意味があることを痛感している．

しかし，残念ながら最近は，ジェネラル・エデュケーションはあまり人気がない．その大きな理由は，博士課程の学生に対する日本学術振興会特別研究員制度にある．これは，博士課程の学生に月 20 万円程度の奨励金と年 100 万円程度の研究費補助金を出すもので，優秀な学生を博士課程に引き留めるための制度である．その趣旨やよし．しかし現実には，学振特別研究員に選ばれるためには，修士課程，それも M1 の間に研究論文が一つは完成している必要がある．そのため，M1 でジェネラル・エデュケーションを受けている余裕がない



観山正見さん（右）と筆者（1979年，イタリア，トリエステでの第2回マーセル・グロスマン会議にて）．

のである．博士課程に進学を希望している学生にとっては，学振特別研究員になれるかなれないかで，非常に大きな経済的格差が出るわけで，学振特別研究員になる可能性を捨てさせて，あえてジェネラル・エデュケーションを要求するわけにはいかないのである．

この問題は，広くは，我々研究者自身が，やはり研究費補助金をもらうために，長期的，あるいは冒険的な研究を避け，より短期的に確実に成果の上がるテーマの研究に走ってしまう現象とよく似ている．このようなことを繰り返していると，数世代先には，真の基礎研究を行おうとする人材は皆無になる恐れがある．そうならないために，何らかの行動を起こすことが，我々研究者，特に年長の研究者に求められている．

私は当初からジェネラル・エデュケーションの重要性を理解していたわけではないが，今振り返ると，私はその恩恵を最も受けたように思う．なぜなら，そのおかげで，学部時代に勉強不足で全く身についていなかった物理の基礎を学び直す機会を与えてもらったからである．しかもそれだけでなく，素粒子や原子核など他分野の連中とも親密に付き合うようになり，色々な分野のことに関して，質問したり議論したりすることができる仲間ができたからである．そういうわけで，私にとっては，タコ部屋は極めて居心地のよいところであり，研究室に配属にならずにずっと居てもよいとさえ思ったものである．

さて，M2になり，研究室に机をもらうとさすがに「勉強」モードから「研究」モードに切り替える必要性を感じて緊張し，これまでのようにのんびり構えていては駄目だぞ，と自分に言い聞かせた．その頃，天体核研究室では様々なテーマのゼミが行われていた．そこで修士論文のテーマ探しに，まずはできるだけ多くのゼミに参加したが，最終的には，一般相対論と宇宙論のゼミに継続的に参加することにした．一般相対論に関しては，当時基礎物理学研究所の教授であった佐藤文隆さんが不定期に主宰されていたゼミに参加した．宇宙論に関しては，当時天体核助手の佐藤勝彦さんが主宰されていたゼミに参加した．

ところで，当時の天体核研究室のメンバーやそのOBには，佐藤姓の方が数多くおり，特に佐藤文隆さんと佐藤勝彦さんは現役スタッフであったので単に佐藤さんと呼ぶだけでは区別がつかなかった．そこで，私が大学院に入学した頃にはすでに，佐藤文隆さんは文隆さん，佐藤勝彦さんは勝さん，という呼び名が定着していた．

これらの2つのゼミで，私は多くの貴重なことを学んだ．もちろん，学問として学んだことも多いが，それよりも重要なことは，研究に対する姿勢である．勝さんからは，どんなに些細と思われることでも疎かにせず，最後まできちんと詰めることの大切さを学んだ．文隆さんからは，一つの見方に捕われずに常に別の見方をする，あるいは逆さからものを見てみることの大切さを学んだ．そして，最も重要なことは，物理の議論においては，立場や身分は全く無関係である，ということであった．実際，その頃私は，自分の無知さ加減を棚に上げて（というよりは無知であることに居直って），何やかやとゼミで質問していた．そのほとんどは無意味な質問か，単なる勘違いの質問であったと思うが，文隆さんや勝さんは，それに対して，決して私の質問を押さえつけようとすることはなかった．それどころか，ひょっとしたら意味のあることを言っているのかもしれない，という風情で熱心に耳を傾けてくれたのである．

上で触れたゼミ以外に，もう一つ，忘れられな

いゼミがある．それは，当時 D3（博士 3 年生）であった中村卓史さん（現天体核教授）が「これからは一般相対論もコンピュータで数値的に解く時代だ」という，当時としては無謀とも言える大胆な考えの下に，院生だけで始めた「数値相対論ゼミ」である．このゼミは，当時 D2 の前田恵一さん（現早大教授），D1 の観山正見さん（現国立天文台長），そして M2 の私という，なぜか一学年ずつ違う 4 名が集まって始まった．もちろん非公式の自主ゼミであるから，ゼミの時間帯は晩である．夕食を済ませて大体 7 時か 7 時半くらいから始め，終わるのは早くて 10 時，大抵は 12 時を回る，という激しいゼミであった．それにも関わらず，ゼミがしんどいという気になることは全くなかった．それどころか，このゼミでは，私は学年が一番下にも関わらず，本当に好き勝手に言いたいことを言わせてもらえたので，面白くて仕方がなかった．勉強や研究がそれほど苦にならずに，物理を楽しむことができるようになったのも，このゼミのおかげである．

このゼミでも，貴重なことをいくつも学んだ．まず中村さんの口癖「物事の本質は 3 行で表せる」．これは，今でも実践するのはなかなか難しい．しかし，3 行で表そうと努力をすることで，細かいことに捕われずに，問題や課題の全体が見渡せるようになるのである．読者諸君にも是非実行してみることを勧める．

一方で，具体的な計算を実行する必要があるときには，どんなに泥臭い，細かい計算も面倒がらずにやるべきである，という一見，上の 3 行の本質とは反対ともとれることも中村さんから学んだ．これはしかし，もちろん反対ではなく，相補的なことである．どの分野でも同様であろうが，緻密さと大胆さの両方が必要なのである．

前田さんからは，時空を幾何学的に捉えることの大切さを学んだ．特に，微分幾何学的なものの見方に加えて，時空構造の本質を「3 行」ではなく，「一つの図」で表すことを学んだ．前田さんから学んだ内容は，現在の私の研究に直結する事柄であり，その意味では最も役に立つことを教えて頂いた．

観山さんとは学年が最も近かったこともあり，ゼミの中で一番親近感を覚えていた．加えて観山さんは，来るものは拒まず，という雰囲気の人で，それに甘えて彼の下宿には相当に頻繁に通い，明け方まで，何やかやと話を聞いてもらった．彼とは，思想的には正反対（観山さん曰く，彼は杜撰右翼，私は杜撰左翼）であったが，そういうことを全く意に介さない，大らかさがあった．そして，どんなことでも，大切だと思うことは簡単には諦めないこと，一方で，2 次的なことは，あっさりと捨てる，ということを学んだ．そういう意味では，今から省みると，観山さんは私の精神安定剤の役割を果たしてくれたのである．

5. 終りに

この間，大学院時代もそれ以降も，様々な機会に様々な人との出会いがあり，その度毎にそれらの人々から貴重なことを学んだり，難しい時期を乗り越えるのを助けられて，現在に至っている．こうして見ると，そうした人々のおかげで現在の私があることを改めて感じる．私は余程運がよかったのかもしれない．しかし，機会を逃さなければ運は必ず向いてくると信じたい．その意味では，若い読者諸君も，是非とも同級生，先輩，後輩，それに諸君の先生方も含めて，様々な人との出会いを大切にしてほしいと思う．そうした出会いから，自分でも気がつかなかった才能が開花し，図らずも道が開けることも多いのである．

（ささき・みさお，京都大学基礎物理学研究所）

特　集（2010年3月号予告）

物理数学の効用

物理の具体例から入る数学抽象世界

本体 952 円

特　集（2010年1月号）

無限次元の魅力

諸分野を照らす多彩な舞台装置

本体 952 円

編集後記

昨年の 11 月にオペラを観に行きました．事前に CD を聴いて予習をしていったのですが，そのときは正直，話の内容もあまり興味の持てるものではなく，本番中に飽きて寝てしまわないか心配していました．ところが，実際に劇場で観ながら聴くと確かに話の内容は変わらないのですが，わかりやすさが聴くだけとは全く違って，最後にはひきこまれてしまいました．実際に目で見ればわかりやすくなる，という意味で可視化なのかもしれません．

ところで今回の特集は目で見て数学を理解することができれば，と願いを込めて企画させていただきました．目に見えれば身近に感じられるのではないかと思います．記事の中では多くの可視化のためのソフトウェアが紹介されています．巻頭で河野先生も仰っていますが，こうしたソフトウェアがあるとコンピュータで実験をしながら研究する手法がだんだん確立されてきて，今までわからなかったようなことが，思わぬ方向から解決される日がくるかもしれません．　(R)

数　理　科　学　2月号

2010 年 2 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

本誌の内容を無断で複写複製・転載することは，著作者および出版者の権利を侵害することがありますので，その場合にはあらかじめサイエンス社著作権担当者あて許諾をお求め下さい．

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁